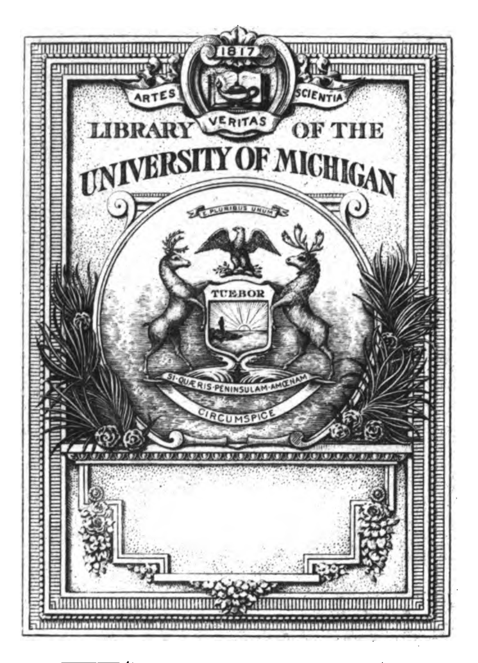

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Les formalités voulues par la loi ont été remplies.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere nec timide.

TOME DEUXIÈME.

PREMIÈRE PARTIE.



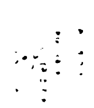
LIÉGE,

CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR.

BRUXELLES,
CHEZ C. MUQUART.
LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS,
CHEZ RORET, LIBre.
RUE HAUTEFEUILLE, 10 *bis*.

Avril 1845.



MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

I. *Enumération des Insectes lépidoptères de la Belgique*

Par M. Edm. DE SELYS-LONGCHAMPS.

En 1837 j'ai commencé la publication d'un Catalogue raisonné des Lépidoptères de la Belgique. Je ne l'ai pas continué immédiatement ayant senti la nécessité de faire de nouvelles recherches sur plusieurs parties des Nocturnes et notamment sur les dernières familles composées des *Pyralis*, des *Tortrix*, des *Tinea* et des *Alucita* de Linné, que les Allemands nomment en commun *Microlépidoptères*, nom expressif qui paraît devoir être admis par les Naturalistes des autres pays.

J'ai aussi différé jusqu'ici la publication du travail que j'offre aujourd'hui afin d'obtenir la détermination exacte de plusieurs espèces douteuses. Je la dois à MM. Boisduval, Duponchel et Pierret qui ont bien voulu s'occuper de cet objet pendant un voyage que j'ai fait à Paris au printemps de 1843.

Le nombre total des Lépidoptères ou Papillons observés jusqu'ici en Belgique est de 1050 espèces environ, y compris une soixantaine de Microlépidoptères indéterminés consistant surtout en Tortricidées et en Tinéidées, les deux familles dont les espèces sont les plus difficiles à déterminer, et pour lesquelles les ouvrages existants laissent beaucoup à désirer. Comme il est probable que l'on observera encore plus d'une centaine au moins de petites espèces on arrive à estimer à 1200 environ le nombre des Lépidoptères de la Belgique.

J'ai indiqué en note afin de compléter cette Faune au point de vue géographique plusieurs espèces qui existent dans le nord et le nord-est de la France, vers nos frontières. J'ai aussi signalé en note quelques espèces que l'on dit avoir été trouvées en Belgique, mais que je n'ai pas vues.

J'ai adopté la nomenclature de M. le docteur Boisduval jusqu'à la fin des Phalénidées et celle de M. Duponchel pour les Microlépidoptères en régularisant toutefois les noms des familles et des tribus, suivant la coutume généralement adoptée, et en rétablissant, ne fut-ce que pour l'ordre, les familles Sphingidées et Bombycidées. Lorsqu'il y a eu exception à cet égard j'ai indiqué en synonymie les noms de l'index de M. Boisduval. En ce qui concerne le système et les genres en général, j'ai cru ne pas devoir m'écarter de ce qui a été proposé par les deux auteurs cités, bien que je considère le nombre des genres comme trop grand surtout parmi les Noctuélidées et les Phalénidées. Mais ce n'était pas ici le lieu de proposer des innovations et je n'ai d'ailleurs étudié cette partie que sous le rapport de la connaissance des espèces. J'aurais désiré aussi rétablir la priorité des noms génériques et spécifiques lorsqu'on s'en est écarté, mais j'ai hésité à le faire ici par la même raison.

A la fin de cette énumération j'ai donné la description des espèces présumées nouvelles et des notes sur plusieurs variétés remarquables ou qui ont donné lieu à des controverses parmi les Entomologistes.

Plus tard je me propose de publier un Catalogue raisonné avec des détails sur les mœurs des espèces, les localités où elles existent, l'époque d'apparition, etc.

Dans le spécimen que j'ai donné en 1837, j'ai soigneusement indiqué les secours que j'ai reçus de divers Entomologistes belges.— Parmi ceux qui ont continué à recueillir les Lépidoptères je citerai particulièrement M. Ch. Donckier-Huart, à Liége, dont la collection s'augmente tous les jours et qui a mis à ma disposition ses notes et ses insectes. MM. Pôlet de Faveaux à Namur, Charlier à Bruxelles et de Frey à Louvain m'ont aussi indiqué plusieurs espèces remarquables recueillies à Namur, dans le Brabant et en Campine. Que ces naturalistes reçoivent ici l'expression de ma gratitude pour leurs précieuses communications!

SECTION I. DIURNES.

(Rhopalocera Bdv.)

FAMILLE 1. PAPILIONIDÉES.

(Succinctæ Bdv.)

TRIBU 1. **Papilionina.**

G. PAPILIO *L. Latr. Bdv.*

1 podalirius. *L.*
var. *diluta.*
2 machaon. *L.*
var. *aurantiaca.*

TRIBU 2. **Pieridina.**

G. PIERIS. *Latr. Bdv.*

3 cratægi. *L.*
4 brassicæ *L.*
5 rapæ *L.*
6 napi *L.*
var. *nigrovenosa De Selys.*
7 daplidice *L.*

G. ANTHOCHARIS *Bdv.*

8 cardamines. *L.*

G. LEUCOPHASIA *Steph. Bdv.*

9 sinapis. *L.*
var. *erysimi Bork.*

G. COLIAS. *F. Bdv.*

10 edusa. *L.*
var. *helice H.*
11 hyale *L.*
var. *heliceides De Selys.*

G. RHODOCERA *Bdv.*

12 rhamni. *L.*

TRIBU 3. **Lycænina.**

G. THECLA *F. Bdv.*

13 betulæ *L.*
14 pruni *L.*
15 w-album *Illig*
16 spini *F.*
17 lynceus. *F.*
var. *cerri H.*
18 quercûs *L.*
19 rubi *L.*

G. POLYOMMATUS *Latr. Bdv.*

20 phlæas *L.*
21 xanthe *F.*
var. *obscurior.*
22 helle *F.*
23 virgaureæ. *L.*
24 chrysæis. (1) *F.*

G. LYCÆNA *F. Bdv.*

25 amyntas *F.*
var ? *Myrmidon Engr.*
26 alsus. *F.*
27 acis. *Wv.*

(1) *Pol. hippothoe* L. se trouve dans le nord et l'est de la France en Picardie et en Lorraine.

28 argiolus (2) *L.*
29 arion (3) *L.*
30 corydon *F.*
31 adonis *F.*
32 dorylas *H.*
33 alexis *F.*
var. *minor* *De Selys.*
var. *agestoides* *De Selys.*
34 agestis *Esp.*
35 ægon *Bork.* (4)

TRIBU 4. **Erycinina.**

G. NEMEOBIUS *Steph. Bdv.*

36 Lucina *L.*

FAMILLE II. NYMPHALIDÉES.

(Pendulæ Bdv.)

TRIBU 1. **Nymphalina.**

G. MELITÆA *F. Bdv.*

1 maturna *L.*
2 artemis *F.*
3 cinxia *F.*
4 dictynna. Esp.
5 athalia Bork.
var. *navarina* *De Selys.*
var. *hisopa.* *De Selys.*
var. *Asteria ? Treits.*

G. ARGYNNIS *Latr. Bdv.*

6 paphia *L.*
var. *valesina Esp.*
7 adippe *F.*
var. *cleodoxa Esp.*
8 niobe *L.*
9 aglaïa *L.*
10 lathonia *L.*
11 dia *L.*
12 ino Esp.
13 selene *F.*
14 euphrosine (5) *L.*

G. VANESSA *Ochs. Bdv.*

15 c-album *L.*
var.
var.
var.
16 urticæ. *L.*
var. *ichnusoides* *De Selys.*
17 polychloros. *L.*
18 antiopa. *L.*
19 io. *L.*
20 atalanta *L.*
21 cardui *L.*
22 prorsa *L.*
var. *levana. L.*

G. NYMPHALIS. *Latr. Bdv.*

23 populi *L.*
var. *tremulæ Guénée.*

G. LIMENITIS. *F. Bdv.*

24 sibylla (6) *F.*
var. *nigrofusca Bdv.*

---

(2) *L. cyllarus* F. des environs de Metz d'après M. Holandre.
(3) *L. euphemus* H. idem idem.
(4) *L. hylas* F. de la Lorraine et du nord de la France.
(5) *Arg. aphirape* du nord de la France et même de la Belgique selon M. Boisduval.
(6) *Lim. camilla* F. de la Lorraine selon M. Holandre.

TRIBU 2. **Apaturina.**

G. APTURA *Ochs. Bdv.*

25 iris *L.*
26 ilia *F.*
var. *Clytie H.*

TRIBU 3. **Satyrina.**

G. ARGE. *Esp. Bdv.*

27 galathea. *L.*

G. EREBIA *Dalm. Bdv.*

28 medusa (7) *F.*

G. SATYRUS *Latr. Bdv.*

29 semele (8) *L.*
30 janira *L.*
var. *hispulla Esp.*
31 tithonus *L.*
32 mæra *L.*
33 megæra *L.*
34 ægeria *L.*
35 hyperanthus *L*
var. *arete Müll.*
36 hero *L.*
37 arcanius. *L.*
38 davus. (9) *L.*
39 pamphilus. *L.*

FAMILLE III. HESPÉRIDÉES.

(Involutæ Bdv.)

Tribu des Hesperina.

G. STEROPES. *Bdv.*

1 paniscus. *F.*

G. HESPERIA *F. Bdv.*

2 comma. *L.*
3 sylvanus. *F.*
4 actæon. *Esp.*
5 linea. *L.*
6 lineola. *O.*

G. SYRICTHUS *Bdv.*

7 malvæ (10) *F.*
8 alveus *H.*
var. *A. Bdv. (major)* (11).
9 carthami *O.*
10 cirsii *Ramb.*
11 alveolus *H.*
var. *Tarras Bergstr.*
12 sao *H.*

G. THANAOS *Bdv.*

13 tages *L.*

---

(7) *Erebia Blandina* F. des environs de Metz selon M. Holandre.
(8) *Sat. Briseis* L. des Ardennes françaises et des environs de Metz.
Sat. Hermione L. idem idem.
Sat. Circe F. des environs de Metz selon M. Holandre.
(9) *Sat. iphis* H. de la Picardie.
(10) *S. altheæ* H. du nord de la France et même de la Belgique selon M. de Koninck.
(11) Cette variété semble la même que celle figurée dans le supplément par M. Duponchel sous le faux nom de *Carthami* et qui provient du midi de la France. Un individu que j'ai pris en Ardenne me semble être le *S. Cacaliæ Ramb.* découvert dans les Alpes.

SECTION II. NOCTURNES.

(Heterocera Bdv.)

FAMILLE I. SPHINGIDÉES.

TRIBU 1. **Sesina.**

G. THYRIS *Illig. Bdv.*

1 Fenestrina *F.*

G. SESIA *Latr. Bdv.*

2 tenthrediniformis *H.*
3 tipuliformis *L.*
4 nomadæformis. *Lasp.*
5 multillæformis *Lasp.*
6 ? culiciformis *L.*
7 cynipiformis *L.*
8 ichneumoniformis *F.*
9 chrysidiformis *Esp.*
10 hylæiformis *Lasp.*
11 spheciformis *H.*
12 asiliformis *F.*
13 apiformis (12) *L.*

TRIBU 2. **Sphingina.**

G. MACROGLOSSA *Ochs. Bdv.*

14 Fuciformis *L.*
15 bombyliformis *O.*
16 stellatarum *L.*

G. DEILEPHILA *Ochs Bdv.* (13)

17 nerii *L.*
18 elpenor *L.*
19 porcellus *L.*
20 celerio *L.*
21 lineata *F.*
22 galii *F.*
23 euphorbiæ *L.*

G. SPHINX *L. O. Bdv.*

24 ligustri *L.*
25 convolvuli *L.*
26 pinastri *L.*

G. ACHERONTIA *Ochs. Bdv.*

27 atropos *L.*

G. SMERINTHUS *Latr. Bdv.*

28 tiliæ *L.*
29 ocellata *L.*
30 populi *L.*
var. *rufescens.*

TRIBU 3. **Zygænina.**

G. ZYGÆNA *Fab. Latr. Bdv.*

31 trifolii *Esp.*
32 loniceræ *Esp.*
var. *minoides De Selys.*
33 filipendulæ (14) *L.*

---

(12) *Sesia Bembeciformis* O. a été trouvée en Belgique selon M. Boisduval.
(13) *Pterogon Ænotheræ* F. Bdv. de la Lorraine d'après M. Holandre.
(14) *Zyg. onobrychis* F. des environs de Metz selon M. Holandre,
Zyg. hippocrepidis O. idem idem.
Zyg. minos Wv. idem idem.

G. SYNTOMIS *Illig. Bdv.*

34 phegea *L*

G. PROCRIS *F. Bdv.*

35 statices *L.*
36 globulariæ *Esp.*

FAMILLE II. BOMBYCIDÉES.

TRIBU 1. **Lithosina.**

G. EUCHELIA *Bdv.* (14)

1 jacobeæ *L.*

G. LITHOSIA *Latr. Bdv.*

2 rubricollis *L.*
3 quadra *F.*
4 griseola *H.*
5 complana *L.*
6 complanula *Bdv.*
7 unita *H.*
8 aureola *H.*
9 muscerda *H.*
10 rosea *F.*
11 mesomella *L.*

G. SETINA *Schr. Steph. Bdv.*

12 irrorea. *H.*

G. NACLIA *Bdv.*

13 ancilla. *L.*

G. NUDARIA *Steph. Bdv.*

14 mundana (15) L.

TRIBU 2. **Chelonina.**

G. CALLIMORPHA *Latr. Bdv.*

15 dominula *L.*
16 hera *L.*

G. NEMEOPHILA *Steph. Bdv.*

17 russula *L.*
18 plantaginis *L.*
var. *Hospita Wv.*

G. CHELONIA *Latr. Bdv.*

19 villica (16) *L.*
20 caja *L.*
var. *A.*
var. *B.*

G. ARCTIA *Latr Bdv.*

21 fuliginosa *L.*
22 lubricipeda *F.*
23 urticæ *Esp.*
24 menthastri *F.*
25 mendica *L.*

TRIBU 3. **Liparidina.**

G. LIPARIS *L. Ochs. Bdv.*

26 monacha *L.*

---

(14) *Emydia cribrum* L. Bdv. des environs de Metz d'après M. Holandre.
E. grammica L. idem idem.
(15) *Nud. senex* H. de la Belgique selon M. Boisduval.
(16) *Chel. civica* H. du nord de la France.
Chel. aulica L. de Metz selon M. Holandre.
Chel. matronula L. idem idem.
Chel. hebe L. idem idem.

27 dispar *L*
var. *nigra.*
28 salicis *L.*
29 auriflua *F.*
30 chrysorrhæa *L.*

G. DEMAS *Steph. (Orgya Bdv.)*

31 v–nigrum *F.*
32 pudibunda *L.*
33 fascelina *L.*
34 coryli *L.*

G. ORGYA *Ochs. Bdv.*

35 antiqua *L.*
36 gonostigma *L.*

TRIBU 4. **Bombycina.**

G. BOMBYX *F. Latr. Bdv.*

37 neustria *L.*
var. *quercina De Selys.*
var. *confluens. De Selys.*
38 castrensis *L.*
39 lanestris (17) *L.*
40 processionea *L.*
41 cratægi *L.*
42 populi *L.*
43 dumeti *L.*
44 rubi *L*
45 quercûs *L.*
var. *A.*
46 ? trifolii *F.*

G. ODONESTIS *Germar. Bdv.*

47 potatoria *L*
var. *A.*

G. LASIOCAMPA *Latr. Bdv.*

48 pruni *L.*
49 quercifolia *L*
var. *alnifolia Ochs.*
50 populifolia *F.*
51 betulæfolia *F.*
52 ilicifolia *L.*

TRIBU 5. **Saturnina.**

G. SATURNIA *Schr. Bdv.*

53 carpini *Bdv.*

TRIBU 6. **Endromidina.**

G. AGLIA *Ochs. Bdv.*

54 tau *L.*

G. ENDROMIS *Ochs Bdv.*

55 versicolora *L.*

TRIBU 7. **Hepialina.**

(Zeuzerides. Bdv.)

G. COSSUS *Fab. Bdv.*

56 ligniperda *F.*

G. ZEUZERA *Latr. Bdv.*

57 æsculi *L.*

G. HEPIALUS *Fab. Bdv.*

58 humuli *L.*
59 sylvinus *L.*
60 lupulinus *L.*
61 hectus *L.*

TRIBU 8. **Psychina.**

G. PSYCHE *Schr. Bdv. Steph.*

62 albida *Esp.*
63 ? muscella (18) *F.*

---

(17) *Bomb. everia* F. de Metz.
(18) *Psyche graminella* Wv. nord et est de la France ; environ de Metz.
Ps. plumigerella. Bdv. nord de la France selon MM. Boisduval et Duponchel.

G. FUMEA *Steph.* (*Psyche Bdv.*)

64 calvella *O.*
65 nitidella *H.*
66 pulla *Esp.*

TRIBU 9. **Limacodina.**

(*Cochliopodes Bdv.*)

G. LIMACODES *Latr. Bdv.*

67 testudo *F.*

TRIBU 10. **Platypterygina.**

(*Drepanulides Bdv.*)

G. CILIX *Leach. Bdv.*

68 spinula *H.*

G. PLATYPTERYX. *Lasp. Bdv.*

69 lacertula *H.*
70 sicula *H.*
71 curvatula *Lasp.*
72 falcula *H.*
73 hamula *Esp.*
74 unguicula *H.*

TRIBU 1. **Notodontina.**

G. DICRANURA *Latr. Bdv.*

75 furcula *L.*
76 bifida *H.*
77 erminea *Esp.*
78 vinula *L.*

G. HARPYA *Ochs. Bdv.*

79 fagi *L.*
80 milhauseri *F.*

G. ASTEROSCOPUS *Bdv.*

81 cassinia (19) *F.*

G. PTILODONTIS *Steph. Bdv.*

82 palpina *L.*

G. NOTODONTA *Ochs. Bdv.*

83 camelina *L.*
84 carmelita *Esp.*
85 dictæa *L.*
86 dictæoides *Esp.*
87 dromedarius *L.*
88 tritophus *F.*
89 ziczac *L.*
90 torva *O.*
91 trepida *F.*
92 melagona *Bork.*
93 velitaris *Esp.*
94 bicolora *F.*
95 querna *Wv.*
96 chaonia *H.*
97 dodonæa (20) *Wv.*

G. GLUPHISIA *Bdv.*

98 crenata *Esp.*

G. DILOBA *Bdv.*

99 cæruleocephala *L.*

G. PYGÆRA *Ochs. Bdv.*

100 bucephala *L.*

G. CLOSTERA *Hoffmansegg. Bdv.*

101 curtula *L.*
102 anachoreta *F.*
103 reclusa *F.*
104 anastomosis *L.*

---

(19) *Ast. nubeculosa* nord de la France.
(20) *Notod. plumigera* des environs de Metz d'après M. Holandre.

FAMILLE III. NOCTUIDÉES.

TRIBU 1. **Cymatophorina.**

(*Noctuobombycini Bdv.*)

G. CYMATOPHORA *Treits Bdv.*

1 ridens *F.*
2 octogesima *H.*
3 or *F.*
4 flavicornis *L.*
5 diluta *F.*
6 fluctuosa *H.*
7 bipuncta *Bork.*

G. CLEOCERIS *Bdv.*

8 oo *L.*
9 viminalis *F.*

G. PLASTENIS *Bdv.*

10 subtusa *F.*
11 retusa *L.*

TRIBU 2. **Acronyctina.**

(*Bombycoïdi Bdv.*)

G. ACRONYCTA *Ochs. Bdv.*

12 leporina *L.*
13 aceris *L.*
14 megacephala *F.*
15 alni *L.*
16 ligustri *F.*
17 strigosa *F.*
18 tridens *F.*
19 psi *L.*
20 cuspis *H.*
21 auricoma *F.*
22 rumicis *L.*
23 euphorbiæ *F.*

G. DIPHTERA *Ochs. Bdv.*

24 orion *Esp.*

G. BRYOPHILA *Tr. Bdv.*

25 glandifera *Wv.*
var. *par H.*
26 perla *F.*
27 algæ *F.*

TRIBU 3. **Amphipyrina.**

G. GONOPTERA *Latr. Bdv.*

28 libatrix *L.*

G. AMPHIPYRA *Ochs. Bdv.*

29 pyramidea *L.*
30 perflua *F.*

G. SCOTOPHILA *H. Bdv.*

31 tragopogonis *L.*

G. MANIA *Tr. Bdv.*

32 typica *L.*
33 maura *L.*

G. RUSINA *Steph. Bdv.*

34 tenebrosa *H.*

TRIBU 4. **Noctuina.**

G. SEGETIA *Steph. Bdv.*

35 xanthographa *F.*

G. CERIGO *Steph. Bdv.*

36 cytherea *F.*

G. TRIPHÆNA *Treits. Bdv.*

37 linogrisea *F.*

38 interjecta *H.*
39 janthina *F.*
40 fimbria *L.*
41 orbona *F.*
42 subsequa *Wv.*
43 pronuba *L.*
var. *innuba.*

G. CHERSOTIS *Bdv.*

44 porphyrea *H.*
45 ? agathina *Bdv.*
46 plecta *L.*

G. NOCTUA *F. Tr. Bdv.*

47 c-nigrum *L.*
48 rhomboidea *Esp.*
49 triangulum *O.*
50 conflua *Tr.*
51 punicea *H.*
52 festiva *Wv.*
53 dahlii *H.*
54 brunnea *F.*
55 baïa *F.*
56 sigma *Wv.*

G. SPÆLOTIS *Bdv.*

57 augur *F.*
58 lucipeta *F.*
59 pyrophila *F.*

G. AGROTIS *Ochs. Bdv.*

60 saucia *H.*
61 suffusa *F.*
62 segetum *Wv.*
var. *dilutior.*
63 exclamationis *L.*
var. *unicolor H.*
64 corticea *Wv.*
65 cinerea *Bork.*
66 tritici *L.*
67 aquilina ? *Wv.*
68 fumosa *F.*
69 puta *H.*
70 lignosa *God.* (*Puta var. Bdv*)
71 putris *L.*

G. HELIOPHOBUS *Bdv.*

72 graminis *L.*
73 popularis *F.*

TRIBU 5. **Hadenina.**

G. LUPERINA *Bdv.*

74 leucophæa *Bork.*
75 testacea *Wv.*
76 infesta *O.*
77 virens *L.*
78 lateritia *Esp.*
79 rurea *F.*
var. *combusta H.*
80 scolopacina *H.*
81 pinastri *L.*
82 lithoxylea *Wv.*
83 polyodon *L.*
84 conspicillaris *L.*
var. *melaleuca Bdv.*
85 basilinea *F.*
86 gemina *H.*
87 didyma *Bork.*
var. *secalina H.*
88 leucostygma *H.*
var. *fibrosa H.*
89 nictictans *L.*

G. APAMEA *Tr. Bdv.*

90 strigilis *L.*
var. *latruncula Wv.*
91 furuncula *Wv.*
var. *vinctuncula H.*

G. HADENA *Tr. Bdv.*

92 persicariæ *L.*
93 suasa *Wv.*

94 oleracea *L.*
95 pisi *L.*
96 chenopodii *F.*
97 dentina *Esp.*
98 saponariæ *Esp.*
99 atriplicis *L.*
100 adusta *Esp.*
101 thalassina *Bork.*
102 genistæ *Bork.*
103 contigua *F.*
104 protea *Esp.*

G. PHLOGOPHORA *Tr. Bdv.*

105 lucipara *L.*
106 meticulosa *L.*

G. APLECTA *Guenée Bdv.*

107 tincta *Bork.*
108 nebulosa *Naturforscher.*
109 occulta *Rossi.*
110 herbida *H.*
var. *prasina Bork.*

G. AGRIOPIS *Bdv.*

111 aprilina *L.*

G. MISELIA *Tr. Bdv.*

112 oxyacanthæ *L.*

G. DIANTHÆCIA *Bdv.*

113 comta *F.*
114 capsincola *Esp.*
115 cucubali *Wv.*

G. ILARUS *Bdv.*

116 ochroleuca *Wv.*

G. POLIA *Tr. Bdv.*

117 dysodea *Wv.*
118 serena *F.*
119 chi *L.*
120 flavicincta *F.*

G. THYATYRA *Ochs. Bdv.*

121 batis *L.*
122 derasa *L.*

TRIBU 6. **Leucanina.**

G. LEUCANIA. *Ochs. Bdv.*

123 conigera *F.*
124 albipuncta *F.*
125 lithargyria *Esp.*
126 l-album *L.*
127 comma *L.*
128 pallens (21) *L.*

TRIBU 7. **Caradrinina.**

G. CARADRINA *Ochs. Bdv.*

129 trilinea *Wv.*
130 plantaginis *H.*
131 blanda *H.*
132 alsines *Bork.*
133 morpheus *Wv.*
134 cubicularis *Wv.*

TRIBU 8. **Orthosina.**

G. ORTHOSIA *Ochs. Bdv.*

135 gothica *L.*
136 hebraica *H.*
137 neglecta *H.*
138 gracilis *F.*
139 humilis *F.*
140 pistacina *F.*
var. *lychnidis H.*

---

(21) *Leuc. impura H.* du nord de la France.
Nonagria typhæ Esp. du nord de la France.

141 rubricosa *F.*
142 macilenta *Tr.*
143 munda *F.*
144 instabilis *F.*
145 ypsilon *Wv.*
146 stabilis *H.*
147 miniosa *F.*
148 ambigua *H.* (22)

G. TRACHEA *Ochs. Bdv.*

149 piniperda *Esp.*

G. COSMIA *Ochs. Bdv.*

150 diffinis *L.*
151 affinis *L.*
152 pyralina *Wv.*
153 trapezina *L.*
154 fulvalgo *Wv.*

G. XANTHIA *Ochs. Bdv.*

155 rubecula *Esp.*
156 ferruginea *H.*
157 rufina *L.*
158 xerampelina *H.*
159 aurago *F.*
160 silago *H.*
161 cerago *Wv.*
162 gilvago *F.*
163 citrago *L.*

G. HOPORINA *Bdv.*

164 croceago *F.*

G. CERASTIS *Ochs. Bdv.*

165 vaccinii *L.*
166 silene *Wv.*
167 satellitia *L.*

TRIBU 9. **Xylinina.**

G. XYLINA *Tr. Bdv.*

168 vetusta *H.*
169 exoleta *L.*
170 rhizolitha *F.*
171 petrificata *F.*

G. XYLOCAMPA *Guénée Bdv.*

172 lithorhyza *Bork.*

G. CLOANTHA *Bdv.*

173 perspicillaris *L.*

G. CLEOPHANA *Tr. Bdv.*

174 linariæ *F.*

G. CUCULLIA *Ochs. Bdv.*

175 absynthi *L.*
176 umbratica *L.*
177 camomillæ *Wv.*
var. *Chysanthemi H.*
(lucifuga Dup.) (23)
178 asteris *F.*
179 scrophulariæ *Esp.*
180 verbasci *L.*

TRIBU 10. **Plusina.**

G. ABROSTOLA *Ochs. Bdv.*

181 triplasiæ *L.*
182 urticæ *H.*

G. CHRYSOPTERA *Latr. Bdv.*

183 concha *F.*

---

(22) *Orth. ruticilla Esp.* (*Serpylli Hubn*) de Metz selon M. Holandre.
(23) *Cuc. lactucæ Esp.* du nord de la France.

G. PLUSIA *Ochs. Bdv.*

184 festucæ *L.*
185 chrysitis *L.*
186 iota *L.*
187 gamma *L.*

TRIBU 11. **Heliothidina.**

G. ANARTA *Ochs. Bdv.*

188 myrtilli *L.*
189 arbuti *F.*

G. HELIOTHIS *Ochs. Bdv.*

190 dipsacea *L.* (24)
191 peltigera *Wv.*
192 armigera *H.*
193 marginata *F.*

TRIBU 12. **Acontina.**

G. ACONTIA *Ochs. Bdv.*

194 luctuosa *Wv.*

TRIBU 13. **Catocalina.**

G. CATEPHIA *Ochs. Bdv.*
195 alchymista *F.*
196 leucomelas *Wv.*

G. CATOCALA *Ochs. Bdv.*

197 fraxini *L.*
198 nupta *L.*
var. *concubina Bork.*
199 sponsa *L.*
var ? *desiderata De Selys.*
200 promissa *F.*
201 electa *Bork.*

G. OPHIUSA *Ochs. Bdv.*

202 lunaris *F.*
203 lusoria *L.*
204 craccæ *F.*

TRIBU 14. **Erastrina.**

(Noctuophalænides Bdv.)

G. EUCLIDIA *Ochs. Bdv.*

205 mi *L.*
106 glyphica *L.*

G. BREPHOS *Ochs. Bdv.*

207 parthenias *L.*
208 notha *H.*

G. ANTHOPHILA *Ochs. Bdv.*

209 ænea *Wv.*
210 argentula *Bork.*

G. AGROPHILA *Bdv.*

211 sulphurea *H.*
212 unca *Wv.*

G. ERASTRIA *Ochs. Bdv.*

213 fuscula *Wv.*
214 atratula *Bork.*

FAMILLE IV. PHALÉNIDÉES.

GEOMETRA *Tr. Bdv.*

1 papilionaria *L.*

PHORODESMA *Bdv.*

2 bajularia *Esp.*

---

(24) *Hel. ononis F.* de l'est de la France — de Belgique ?

HEMITHEA *Dup. Bdv.*

3 cythisaria *Wv.*
var. *coronillaria Dup.*
4 æruginaria *Wv.*
5 viridaria *L.*
6 vernaria *Wv.*
7 æstivaria *Esp.*

PHALÆNA *L. Steph.*
(Metrocampa Latr. Bdv.)

8 fasciaria *L.*
var. *prasinaria H.*
9 margaritaria *L.*
10 honoraria *Wv.*

URAPTERYX *Kirby Bdv.*

11 sambucaria *L.*

RUMIA *Dup. Bdv.*

12 cratægaria *L.*

ENNOMOS *Dup. Bdv.*

13 syringaria *L.*
14 dolabraria *L.*
15 apiciaria *Wv.*
16 parallelaria *Wv.*
17 advenaria *Esp.*
18 lunaria *Wv.*
19 delunaria *H.*
20 illunaria *Wv.*
21 illustraria *H.*
22 angularia *Wv.*
23 erosaria *Wv.*
24 tiliaria *H.*
25 alniaria *L.*
26 dentaria *Esp.*
27 prunaria *L.*
var. *corylaria Esp.*

HIMERA *Dup. Bdv.*

28 pennaria *L.*

CROCALLIS *Tr. Bdv.*

29 elinguaria *L.*

AVENTIA *Dup. Bdv.*

30 flexularia *H.*

MACARIA *Curtis Bdv.*

31 notataria *F.*
32 alternaria *H.*
33 lituraria *H.*

HALIA *Dup. Bdv.*

34 wavaria *L.*

ASPILATES *Tr. Bdv.*

35 vibicaria *L.*
36 purpuraria *L.*
37 adspersaria *Bork.*
38 ? citraria *H.*
39 gilvaria *Wv.* (25)

PLOSERIA *Bdv.*

40 diversaria *H.*

NUMERIA *Dup. Bdv.*

41 pulveraria *L.*

FIDONIA *Tr. Bdv.*

42 piniaria *L.*
43 atomaria *L.*

EUPISTERIA *Bdv.*

44 concordaria *H.*
45 quinquaria *H.*
46 hepararia *H.*

---

(25) *Asp. gloriosiaria Bdv.* des marais de la Picardie.

SPERANZA *Curtis. Bdv.*

47 conspicuaria *Esp.*

ANISOPTERYX *Steph. Bdv.*

48 æscularia *Wv.*

HIBERNIA *Latr. Bdv.*

49 aceraria *Wv.*
50 rupicapraria *Wv.*
51 aurantiaria *Esp.*
52 progemmaria *H.*
53 defoliaria *L.*
54 leucophæaria *Wv.*
var. *nigricaria H.*
55 bajaria *H.*
56 pilosaria *Wv.*

NYSSIA *Dup. Bdv.*

57 hispidaria *Wv.*

AMPHIDASIS *Tr. Bdv.*

58 histaria *L.*
59 betularia *L.*
60 prodomaria *F.*

BOARMIA *Tr. Bdv.*

61 repandaria *Wv.*
62 roboraria *Wv.*
63 consortaria *F.*
64 rhomboidaria *Wv.*
65 abietaria *Wv.*
66 cinctaria *Wv.*
67 viduaria *Wv.*
68 lichenaria *Wv.*

TEPHROSIA *Bdv.*

69 crepuscularia *Wv.*
70 consonaria *H.*
71 extersaria *H.*
72 punctularia *H.*

ELOPHOS *Bdv.*

73 dilucidaria ? *Wv.*

GNOPHOS *Tr. Bdv.*

74 furvaria *H.*
75 obscuraria *H.*

BOLETOBIA *Bdv.*

76 carbonaria *Wv.*

EUBOLIA *Dup. Bdv.*

77 murinaria *Wv.*
78 palumbaria *Wv.*
79 mensuraria *Wv.*
80 obliteraria *De Selys.*
81 mæniaria *Wv.*
82 bipunctaria *Wv.*
83 ? salicaria *Tr.*
84 ? scabraria *Tr.*
85 miaria *Wv.*
86 ferrugaria *Wv.*
87 quadrifasciaria *Wv.*
88 ligustraria *Tr.*

ANAITIS *Dup. Bdv.*

89 donchieraria *De Selys.*
90 plagiaria *L.*
91 ? præformaria. *H.*

LARENTIA *Tr. Bdv.*

92 dubitaria *L.*
93 certaria *H.*
94 undularia *L.*
95 bilinearia *L.*
var. *fusca.*
96 tersaria *Wv.*
97 vitalbaria *Wv.*
98 aquaria *H.*
99 polygrammaria *Bork.*
100 petraria *Esp.*

101 mollugioaria ? *H.*
102 cæsiaria *Wv.*
103 psittacaria *F.*
104 coraciaria *H.*
105 dilutaria *Wv.*
106 autumnaria *Bdv.*
107 brumaria *L.*

LOBOPHORA *Curtis Bdv.*

108 sertaria *H.*
(appendicularia Bdv.)
109 lobularia *H.*
110 hexapteraria *F.*

EUPITHECIA *Curtis Bdv.*

111 impuraria *H.*
112 sparsaria *H.*
113 pimpinellaria *H.*
114 oxydaria *Tr.*
115 succenturaria *L.*
116 centaurearia *H.*
117 reductaria *Bdv.*
118 venosaria *H.*
119 subumbraria *H.*
120 pusillaria *Wv.*
121 valerianaria *H.*
122 pumilaria *H.*
123 austeraria *H.*
124 indigaria *H.*
125 minutaria *H.*
var. *absynthiaria H.*
126 strobilaria *Bork.*
127 rectangularia *F.*
128 coronaria *H.*
(rectangularia var. Bdv.)
129 begrandaria *Bdv.*
130 oxycedraria *Ramb.*
131 sobrinaria *H.*
132 nanaria *H.*

CHESIAS *Tr. Bdv.*

133 spartiaria *F.*
134 obliquaria *Wv.*

CIDARIA *Tr. Bdv.*

135 achatinaria *H.*
136 popularia *L.*
137 pyraliaria *Wv.*
138 fulvaria *Wv.*
139 juniperaria *L.*
140 variaria *Wv.*
141 ruptaria *H.*
142 simularia *H.*
143 sinuaria *Wv.*
144 rubidaria *Wv.*
145 derivaria *Wv.*
146 badiaria *Wv.*
147 berberaria *Wv.*
148 prunaria *L.*
(ribesiaria Bdv.)
149 silacearia *Wv.*
150 russaria *Wv.*
151 elutaria *H.*
152 impluviaria *H.*
153 propugnaria *F.*
154 viretaria *H.*
155 picaria *H.*
156 olivaria *Tr.*

G. MELANIPPE *Dup. Bdv.*

157 macularia *L.*
var. *fusca.*
158 marginaria *H.*
159 hastaria *L.*
160 tristaria *L.*
161 luctuaria *Wv.*
162 rivularia *Wv.*
163 rivaria *H.*

164 alchemillaria *L.*

G. MELANTHIA *Dup. Bdv.*

165 montanaria *Wv.*
166 ocellaria *L*
167 fluctuaria *L.*
168 galiaria ? *Wv.*
169 blandiaria *Wv.*
170 rubiginaria *Wv.*
171 procellaria *Wv.*
172 adustaria *Wv.*
173 albicillaria *L.*

G. ZERENE *Tr. Bdv.*

174 grossularia *L.*
175 ulmaria *H.*

G. CABERA *Tr. Bdv.*

176 taminaria *H.*
177 pusaria *L.*
178 exanthemaria *Esp.*
179 strigillaria *Esp.*

G. EPHYRA *Dup. Bdv.*

180 trilinearia *Bork.*
181 punctaria *L.*
var. ? *hybridaria De Selys*
182 poraria *Tr.*
183 pendularia *L.*
184 omicronaria *Wv.*

G. ACIDALIA *Tr. Bdv.*

185 temeraria *H.*
186 ornataria *Esp.*
187 contiguaria *H.*
188 incanaria *H.*
189 rusticaria *H.*
190 scutularia *H.*
191 bisetaria *Tr.*
var. *reversaria Dup.*
var. *sylvestraria Dup.*
192 auroraria *Wv.*
193 ochrearia *F.*
194 rufaria ? *H.*
195 rubricaria *H.*
196 osseraria *Wv.*
197 lutearia *Wv.*
198 decoloraria *H.*
199 albularia *F.*
200 sylvaria *Wv.*
201 candidaria *W.*
202 immoraria *L.*
203 cespitaria *Bdv.*
204 sylvestraria *Bork.*
205 punctaria *Devillers.*
206 remutaria *H.*
207 aversaria *L.*
208 emarginaria *L.*
209 imitaria *H.*
210 mutataria *H.*
211 ? umbellaria *H.*
212 strigilaria *Wv.*
(prataria Bdv.)

G. TIMANDRA *Dup. Bdv.*

113 amataria *L.*

G. STRENIA *Dup. Bdv.*

214 clathraria (25) *L.*

G. STHANELLA *Bdv.*

215 hippocastanaria *H.*

G. ODEZIA *Bdv.*

216 chæriophyllaria *L.*

G. MINOA *Tr. Bdv.*

217 euphorbiaria *H.*

---

(25) *Siona dealbaria* L. des environs de Metz.

FAMILLE V. PYRALIDÉES.

TRIBU 1. **Herminina.**

G. HERMINIA *Latr. Dup.*

1 emortualis *H.*
2 derivalis *H.*
3 grisealis *H.*
4 tarsiplumalis *H.*
5 barbalis *L.*
6 crinalis *Tr.*

G. HYPENA *Schr. Dup.*

7 proboscidalis *L.*
8 rostralis *Schr.*
9 crassalis *F.*
var. *nigralis.*

G. MADOPA *Steph. Dup.*

10 salicalis *Wv.*

G. AGLOSSA *Latr. Dup.*

11 pinguinalis *L.*
12 cuprealis *H.*

G. CLEDEOBIA *Steph. Dup.*

13 angustalis *Wv.*
14 brunnealis *Tr.*

TRIBU 2. **Pyralina.**

G. ODONTIA *Dup.*

15 dentalis *Schr.*

G. SCOPULA *Schr. Dup.*

16 umbralis *H.*
17 prunalis *Wv.*
18 nubilalis *H.*
19 margaritalis *Wv.*
20 stramentalis *Tr.*
21 frumentalis *L.*

G. BOTYS *Latr. Dup.*

22 urticalis *L.*
23 hyalinalis *Schr.*
24 verticalis *L.*
25 lancealis *Wv.*
26 cineralis *Wv.*
27 verbascalis *Wv.*
28 sambucalis *Wv.*
29 flavalis *Wv.*
30 crocealis *H.*
31 politalis *F.*
32 fulvalis *H.*
33 ferrugalis *H.*
34 sericealis *F.*
35 forficalis *F.*
36 hybridalis *H.*
37 palealis *F.*

G. HYDROCAMPA *Latr. Dup.*

38 potamogalis *L.*
39 obscuralis *De Selys.*
40 nymphæalis *L.*
41 lemnalis *L.*
42 stratiolalis *L.*
43 litteralis *Scop.*

G. PYRALIS, *L. Illig. Samouel.*
(Asopia Tr. Dup.)

44 farinalis *Wv.*
45 glaucinalis *L.*
46 nemoralis *Schr.*
47 flammealis *Wv.*

TRIBU 2. **Pyraustina.**

G. PYRAUSTA *Schr. Dup.*

48 purpuralis *L.*
49 puniceälis *Wv.*
50 cespitalis *Wv.*

G. ENNYCHIA *Tr. Dup.*

51 anguinalis *H.*
52 cingulalis *L.*
53 atralis *H.*
54 octomaculalis *L.*

C. NOLA *Leach. Dup.*

55 strigulalis *Wv.*
56 ? cristulalis *H.*
57 palliolalis *Wv.*
58 centonalis *H.*

TRIBU 4. **Eudoræina.**

G. EUDORÆA *Curtis. Dup.*

59 ambigualis *Tr.*
60 dubitalis ? *H.*
61 cratægalis? *L.*

FAMILLE VI. TORTRICIDÉES.

G. HALIAS *Tr, Dup.*

1 quercana *Wv.*
2 prasinana *L.*
3 chlorana *L.*

G. SARROTHRIPA *Curtis Dup.*

4 revayana *F.*
5 ramosana *Curtis.*

G. TORTRIX *L. Tr. Dup.*

6 viridana *L.*
7 cratægana *H.*
8 amerinana *L.*
9 corylana *F.*
10 sorbiana *H.*
11 xylosteana *L.*
12 roborana *H.*
13 oxyacanthana *H.*
14 plumbana *L.*
15 unicolorana *Dup.*
16 ministrana *L.*
17 alphontiana *Dup.*
18 holmiana *L.*
19 grotiana *F.*
20 læflingiana *H.*
21 lecheana *L.*
22 bergmannana *L.*
23 hoffmanseggiana *Tr.*
24 ribeana *H.*
25 gnomana *L.*
26 heparana *Wv.*
27 acerana *H.*
28 permixtana *H.*

G. GLYPHIPTERA *Dup.*

29 tripunctana *H.*
30 squamana *F.*
31 nebulana *H.*
32 boscana *F.*
33 cerusana *Dup.*
34 treveriana *Wv.*
35 litterana *L.*
36 rufana ? *H.*
37 spectrana ? *Tr.*
38 badiana ? *H.*

39 lipsiana ? *Wv.*
40 ulmana *Dup.*

G. PERONEA *Steph. Dup.*

41 abildgaardiana *F.*
42 favillaceana *H.*
43 asperana *F.*
44 comparana *H.*

G. TERAS *Tr. Dup.*

45 caudana *F.*
46 emargana ? *F.*

G. ASPIDIA *Tr. Dup.*

47 cynosbana *F.*
48 solandriana *L.*

G. PENTHINA *Tr. Dup.*

49 salicana *L.*
50 capreana *H.*
51 pruniana *H.*
52 hartmanniana *L.*
53 sauciana *H.*
54 areolana *H.*
55 luscana *F.*
56 gentianana *H.*
57 cespitana *H.*
58 ocellana *H.*
59 variegana *H.*
60 minorana *H.*

G. SERICORIS *Tr. Dup.*

61 urticana *H.*
62 gemmana *H.*
63 elutana *Dup.*
64 conchana *H.*
65 zincknenana ? *Tr.*
66 charpentierana *Tr.*

G. COCCYX *Tr. Dup.*

67 comitana *Wv.*
68 flammeana *H.*
69 turionana ? *L.*
70 resinana *L.*

G. CARPOCAPSA *Tr. Dup.*

71 pomonana *L.*
72 splendana *H.*
73 wœberiana *H.*
74 arcuana *F.*

G. GRAPHOLITHA *Tr. Dup.*

75 hohenwartiana *Wv.*
76 campoliliana *Wv.*
77 rhediana *L.*
78 nebritana *Tr.*
79 triquetrana *H.*
80 petrana *H.*
81 vermiculana ? *Dup.*
82 cæcimaculana *H.*
83 lithoxylana *Frœlich.*
84 mitterbachiana *Wv.*
85 succedana ? *Wv.*
86 hypericana ? *H.*
87 minutana ? *H.*
88 aspidiscana *H.*
89 costana *Curtis.*
90 siliceana *H.*

G. EPHIPPIPHORA *Dup.*

91 trauniana *H.*
92 petiverana *L.*
93 composana *F.*
94 germarana.
95 luctuosana *Dup.*
96 ulmana *H.*
97 alpiniana *Tr.*
98 fæneana *L.*
99 pygmæana *H.*
100 jungiana *L.*
101 mediana ? *Wv.*

102 inquinatana ? *H.*
103 ephippina ? *H.*
104 dorsana *H.*
105 argyrana *H.*

G. PHOXOPTERYX *Tr. Dup.*

106 derasana *H.*
107 lanceolana *H.*
108 penkleriana *Wv.*
109 myrtillana *H.*
110 siculana.
111 unguicana *L.*
112 uncana *Wv.*
113 ramana *L.*
114 badiana *Wv.*

G. PAEDISCA *Tr. Dup.*

115 parmatana ? *H.*
116 corticana *H.*
117 nubilana *H.*
118 wellensiana *H.*
119 similana ? *H.*
120 tenerana *H.*

G. SCIAPHILA *Tr. Dup.*

121 wahlbaumiana *L.*
122 rugosana *H.*
123 musculana *H.*
124 striana *Wv.*
125 cretaceana *H.*
126 quadrana *H.*
127 frutetana *H.*

G. XANTHOSETIA *Steph. Dup.*

128 zoegana *L.*
129 hamana *L.*

G. COCHYLIS *Tr. Dup.*

130 ambiguana *Tr.*
131 angustana *H.*
132 smeathmanniana *F.*
133 dubitana *H.*
134 reliquana *Dup.*

G. ARGYROLEPIA *Steph. Dup.*

135 baumanniana *F.*
136 tesserana *Wv.*
137 rubigana *Tr.*

G. XYLOPODA *Latr. Dup.*

138 fabriciana *L.*
139 pariana *L.*

G. PHIBALOCERA *Steph. Dup.*

140 fagana *Wv.*

FAMILLE VII. CRAMBIDÉES.

TRIBU 1 **Crambina.**

G. SCHÆNOBIUS *Dup.*

1 gigantellus *L.*
2 forficellus *Thunberg.*
3 mucronellus *Wv.*

G. CRAMBUS *F. Latr. Dup.*

4 pascuellus *L.*
5 dumetellus *H.*
6 pratellus *L.*
7 adipellus *Tr.*
8 rorellus *L.*
9 chrysonnehellus *Scop.*
10 hortuellus *H.*
11 falsellus *Wv.*
12 culmellus *L.*
13 inquinatellus *Wv.*

14 pinetellus *H.*
15 mytilellus *H.*
16 conchellus *Wv.*
17 margaritellus *Wv.*
18 aquilellus *H.*
19 luteellus *Wv.*
20 perlellus *Wv.*
21 angulatellus *Dup.*

TRIBU 2. **Gallerina.**

G. ILYTHIA *Latr. Dup.*

22 carnella *L.*
23 ? argyrella *Wv*

G. PHYCIS *Zincknen Dup.*

24 palumbella *Wv.*
25 ahenella *Wv.*
26 transversella *Dup*
27 abietella *Wv.*
28 roborella *H.*
29 ornatella *Wv.*
30 subornatella *Zeller.*
31 tumidella *Wv.*
32 elutella *H.*
33 rhenella *Tr.*

G. GALLERIA *Latr.*

34 colonella *L.*
35 anella *Wv.*
36 cerella *L.*

FAMILLE VIII. TINEIDÉES.

TRIBU 1. **Yponomeutina.**

G. MIELOPHILA *Tr. Dup.*

1 cribrella *F.*

G. MELANOLEUCA *Steph.*
(Ædia Dup.)

2 echiella *Wv.*
3 cænobitella *H.*

G. YPONOMEUTA *Latr. Dup.*

4 evonymella *H.*
5 cognatella *H.*
6 malinella *Dup.*
7 padella *L.*
8 plumbella *F.*
9 sexpunctella *H.*
10 sedella *Tr.*

TRIBU 2. **Tineina.**

G. DIURNEA *Haworth Dup.*

11 fagella *L.*
var. ? *dormoyella Dup.*

G. LEMMATOPHILA *Tr. Dup.*

12 salicella *H.*
13 phryganella *Schr.*

G. SOLENOBIA *Dup.*

14 andereggella *Dup.*

G. EPIGRAPHIA *Steph. Dup.*

15 strincknellnerella *Wv.*
16 avellanella *H.*

G. TINEA *L. Geoffr. Latr. Dup.*

17 granella *L.*
18 tapezella *L.*
19 herodella *S.*
20 ferruginella *H.*

21 repandella *H.*
22 pellionella *L.*
23 crinella *Tr.*
24 cerasiella *H.*
25 cratægella *L.*
26 lappella *H.*

G. HÆMILIS *Tr. Dup.*

27 cicutella *Tr.*
28 hypericella? *H.*
29 pastinacella *Zeller.*
30 arenella *Wv.*
31 rubidella *H.*
32 alstroemerella *L.*
33 heracliella *L.*
34 depressella *H.*
35 depunctella *Tr.*

G. AGONIOPTERYX *Tr.* (*Caulobius Dup.*)

36 sparganella *Germar.*

G. PLUTELLA *Curtis* (*Hypsolopha Dup.*)

37 sylvella *L.*

G. RHINOSIA *Tr. Dup.*

38 costella *F.*
39 ustubella *F.*
40 fasciella *H.*
41 sequella *L.*
42 fissella *H.*
43 vittella *Steph.*

G. HYPSOLOPHA *Fab. Steph.* (*Alucita Dup.*)

44 xylostella *L.*
45 porrectella *L.*

G. PALPULA *Tr. Dup.*

46 bicostella *L.*
47 barbella *L.*

G. HARPIPTERYX *Tr. Dup.*

48 harpella *F.*

G. LAMPROS *Tr. Dup.*

49 majorella *Wv.*

G. ANACAMPSIS *Curtis Dup.*

50 Zephyrella *Tr.*
51 populella *L.*
52 nigrovitella *Dup.*
53 luculella *H.*
54 tremulella *Dup.*

G. LITA *Tr. Dup.*

55 vorticella *Scop.*
56 alacella *Zeller.*
57 albocingulella *Dup.*
58 bicolorella *Tr.*
59 betulinella *H.*
60 nigrovitella *Dup.*

G. ACOMPSIA *H. Dup.*

61 tripunctella *F.*
62 cinerella *L.*

G. BUTALIS *Tr. Dup.*

63 similella *H.*
64 tinctella *H.*

G. ADELA *Latr. Dup.*

65 degeerella *L.*
66 scabiosella *Scop.*
67 reaumurella *L.*
68 violella? *Wv.*
69 cuprella *Wv.*
70 swammerdammella *L.*
71 calthella *L.*
72 donzelella *Dup.*

G. DASYCERA *Steph. Dup.*

73 oliviella *F.*

G. ENICOSTOMA *Steph. Dup.*

74 geoffroyella *L.*

G. INCURVARIA *Steph. Dup.*

75 flavimitrella *H.*
76 masculella *Wv.*
77 multipunctella *Dup.*

G. STENOPTERA *Dup.*

78 orbonella *H.*

G. ÆSCHMIA *Tr. Dup.*

79 thrasonella *Scop.*
80 equitella *Scop.*

G. ÆCOPHORA *Latr. Dup.*

81 brockeella *H.*
82 tetrapodella *L.*
83 pruniella *L.*
84 linneella *L.*
85 schmidtella *Tr.*
86 guttiferella *Zeller.*
87 goedartella *L.*
88 hermannella *F.*
89 procerella *H.*
90 fundella *Tr.*

G. ELACHISTA *Tr. Dup.*

91 complanella *H.*
92 muscidella *H.*
93 salaciella *H.*
94 cydoniella *F.*
95 spartifoliella *H.*
96 alcyonipennella ? *Kollar.*
97 cramerella *F.*
98 ulmifoliella *H.*
99 saportella *Dup.*
100 boyerella *Dup.*
101 spinelella *Dup.*
102 quercifoliella *Fischer.*

G. ORNIX *Tr. Dup.*

103 struthionipennella *Wv.*
104 ornatipennella *H.*
105 otidipennella *H.*

G. GRACILLARIA *Steph. Dup*

106 hilaripennella *H.*
107 upupæpennella *H.*
108 signipennella *H.*

FAMILLE IX. PTÉROPHORIDÉES.

TRIBU 1. **Pterophorina.**

G. PTEROPHORUS *Geoffr. Dup.*

1 ochrodactylus *Wv.*
2 rhododactylus *H.*
3 tesseradactylus *L.*
4 calodactylus *Wv.*
5 didactylus *Scop.*
6 hemididactylus *De Selys.*
7 phæodactylus *H.*
8 pterodactylus *Scop.*
9 ptilodactylus *H.*
10 zophodactylus *Dup.*
11 xanthodactylus *Tr.*
12 lithoxylodatyclus ? *Dup.*
13 tetradactylus *L.*
14 galactodactylus ? *Curtis.*
15 pentadactylus *L.*
16 spilodactylus *Curtis.*

TRIBU 2. **Alucitina.**

G. ALUCITA *L. Curtis.*

(Orneodes Latr. Dup.)

17 hexadactyla *L.*

RÉCAPITULATION.

Diurnes.	papilionidées	36 espèces.
	nymphalidées	39
	hespéridées	13
Nocturnes.	sphingidées	36
	bombycidées	104
	noctuidées	214
	phalénidées	217
	pyralidées	61
	tortricidées	140
	crambidées	36
	tinéidées	108
	ptérophoridées	17
	TOTAL	1021

Plus 80 espèces environ de tortricidées et de tinéidées répandues dans les collections = 1100 espèces.

ABREVIATIONS

DES AUTEURS CITÉS DANS LE COURS DE CE TRAVAIL.

Bdv. — Boisduval.
Bork. — Borkhausen.
Dup. — Duponchel.
Eng. — Engramelle.
Esp. — Esper.
F. — Fabricius (J. Chr.)
Schr. — Schranck.
Scop. — Scopoli.
Steph. — Stephens (J. Fr.)
Tr. — Treitske.
Wv. — Denis et Schiffermüller.
Geoffr. — Geoffroy.
H. — Hubner.
Illig. — Illiger.
L. — Linné.
Latr. — Latreille.
O. — Ochsenheimer.

DESCRIPTION

DES ESPÈCES PRÉSUMÉES NOUVELLES ET DE QUELQUES VARIÉTÉS REMARQUABLES INDIQUÉES DANS L'ÉNUMÉRATION DES LÉPIDOPTÈRES LA BELGIQUE.

---

§. 1. Espèces nouvelles.

N°. EUBOLIA OBLITERARIA *De Selys.*

Eubolie oblitérée.

Taille intermédiaire entre celle des *E. ligustraria* et *ferrugaria* (11 lignes ½, d'envergure) — antennes plus courtes, plus pectinées, plus foncées que chez la *ligustraria* — ailes plus larges, moins oblongues d'un cendré noirâtre en-dessus avec quelques dessins plus foncés consistant (autant que l'on peut en juger sur un exemplaire altéré) 1°. en un point discoidal un peu après la moitié des supérieures. 2° une raie transverse parallèle au bord de l'aile entre ce point et l'extrémité. 3°. une raie analogue aux deux tiers des ailes inférieures.

Le dessous des quatre ailes est cendré foncé comme le dessus passant un peu au brun roussâtre vers la côte et les extrémités. On distingue le point noir discoidal des ailes supérieures.

La frange est semblable au fond des ailes de part et d'autre.

Par la couleur uniforme du dessous des ailes, cette espèce se rapproche un peu de la *mensuraria* et de la *palumbaria* mais le point discoidal des supérieures en dessous et la forme raccourcie du sommet des quatre l'en distinguent au premier abord — d'après la description donnée par M. Duponchel de l'*artesiaria* cette dernière me semble au moins bien voisine de notre nouvelle espèce.

Décrite d'après un individu mâle en mauvais état que j'ai pris dans la promenade à Spa vers le 15 août et que M. le docteur Boisduval n'a pu rapporter à aucune espèce de sa collection.

N°. 2. ANAÏTIS DONCKIERARIA *De Selys.*

Anaïte de Donckier.

Un peu plus petite que l'*Eubolia palumbaria* (à peine 13 lignes d'envergure) — ailes d'un blanchâtre cendré en dessus — les supérieures traversées par trois bandes rectilignes équidistantes d'un brun roussâtre clair ; l'une à la base , la seconde au milieu , la troisième entre le milieu et l'extrémité. Les deux premières sont légèrement fléchies à la côte — toutes sont terminées en dedans par une ligne plus foncée et en dehors par une ligne interrompue ce qui divise l'aile en sept parties égales. — On voit en outre des séries de points noirâtres saupoudrés sur le milieu des bandes claires. Les ailes inférieures sont traversées dans leur dernier tiers par une raie droite foncée — la frange des quatre ailes est précédée d'une suite de points noirs.

Dessous des ailes blanc jaunâtre sale , saupoudré de petits points cendré roussâtre avec un point discoidal suivi de deux raies transverses grises sur toutes les ailes. — Corps , pattes et antennes blanchâtres.

Décrite d'après un exemplaire pris en été à Chaudfontaine près de Liége par M. Donckier-Huart. Je l'ai dédiée à cet Entomophile dont les recherches et le zèle infatigables ont beaucoup contribué à faire connaître les lépidoptères de la Belgique.

N°. 3. HYDROCAMPA OBSCURALIS *De Selys.*

Hydrocampe obscur.

Cet Hydrocampe qui pourrait bien n'être qu'une variété du *potamogalis* en diffère surtout en ce que le fond des ailes est brun enfumé (mais avec les dessins noirs ordinaires) — aussi a-t-il un peu de l'apparence du *Botys sambucalis* sauf que les taches blanches mêmes sont envahies chez notre Hydrocampe par la couleur de suie. Le dessous des ailes est totalement brun-noirâtre luisant chez quelques exemplaires, mais avec des vestiges de taches blanchâtres chez d'autres. Chez ces derniers le dessus est aussi moins foncé et se rapproche un peu plus du *potamogalis* ce qui m'a fait soupçonner que l'*obscuralis* pourrait n'en être qu'une variété remarquable.

Je l'ai pris en été à Longchamps-sur-Geer non loin des étangs. Il est très-rare. Il ne serait pas impossible que le *potamogalis* dut-être démembré en deux espèces d'après une autre considération ; celle de la grande diversité de taille ; dans ce cas l'*obscuralis* serait peut-être une variété de la petite race (qui ressemble un peu au *nymphœalis*) car il n'a jamais plus de 10 lignes d'envergure tandis que la grande race ou *potamogalis* proprement dit à les dessins moins arrêtés et varie de 12 à 15 lignes d'envergure.

N°. PTEROPHORUS HEMIDIDACTYLUS *De Selys.*

Ptérophore hémididactyle.

Cette espèce que M. Duponchel n'a pu reconnaître est d'un tiers plus petite qu'aucune de celles qu'il a publiées. Elle n'a que 5 lignes $^1/_2$ d'envergure mais ressemble beaucoup pour la forme et la coloration au *Pt. didactylus* qui a 8 lignes $^1/_2$ d'envergure.

Ne possédant qu'un seul individu non étalé que j'ai pris sur les broussailles des hautes fanges à Francorchamps près de Spa vers la fin de juillet, je n'oserais affirmer que les légères différences qui existent entre sa coloration et celle du *didactylus* soient constantes, mais n'ayant jamais vu de grandes variétés dans la stature de ce dernier je suis persuadé que l'*hemididactylus* forme une espèce distincte caractérisée principalement par ses dimensions. C'est le pygmé du genre, au moins dans notre pays.

§ 2. Variétés.

N°. PIÈRIS NAPI *(L.) var. nigrovenosa De Selys.*

On n'observe que la femelle de cette variété qui est intermédiaire entre la *P. napi* proprement dite et la variété locale nommée *P. bryoniœ* qui se trouve dans les hautes Alpes. Elle est veinée et saupoudrée de noir en dessus presqu'autant que cette dernière, mais le fonds n'a pas autant cette coloration générale jaunâtre qui caractérise la variété alpine.

On la trouve dans nos bois humides.

J'ai pris au Simplon au niveau des neiges perpétuelles le mâle de la var. *bryoniœ*. Comme les entomologistes en parlant de cette variété remarquable ne font pas mention du mâle, je pense que

d'autres seront curieux comme je l'étais moi-même de connaître le facies d'un mâle pris en même qu'une femelle très caractérisée. Le dessus des ailes est blanc sans aucune tache: La base est un peu plus grisâtre que chez les individus ordinaires et la côte des supérieures est largement noirâtre. Le sommet ne diffère pas. Les nervures sont très-légèrement saupoudrées à leur extrémité. Le dessous des ailes est remarquable en ce qu'il est blanc, *nullement* lavé de jaunâtre sauf un vestige à la base des inférieures. Les nervures de ces dernières sont plus largement veinées de gris un peu olivâtre. Les antennes ont leur bouton plus jaune et sont annelées de roussâtre au lieu de blanc. C'est ici le lieu de faire remarquer que le mâle du *Pieris napi* a une odeur aromatique très-forte analogue à celle du serpolet. Je suis surpris qu'aucun entomologiste n'ait noté ce fait qui est constant.

Je crois me rappeler que le mâle de la variété pris au Simplon avait également cette odeur.

N°. 6. COLIAS HYALE *(L.) var. heliceides De Selys.*

Décrite d'après un individu singulier que j'ai pris en été à Longchamps-sur-Geer (province de Liége).

Il a la taille et l'apparence des petites femelles de la *C. chrysotheme* (16 lignes d'envergure) mais la teinte du fonds est d'un blanc un peu verdâtre comme celle de la variété *helice* de l'*edusa* ou de la femelle de la *phicomone*. Il diffère des exemplaires ordinaires par les caractères suivants : 1°. la bordure maculaire des quatre ailes est plus épaisse et à peu près aussi marquée que chez l'*edusa* femelle excepté qu'aux ailes supérieures la partie noire intérieure ne descend pas jusqu'au bord interne. 2°. la base des supérieures et la plus grande partie des inférieures excepté les taches de la bande marginale sont saupoudrées de gris verdâtre comme chez l'*helice* et la *phicomone*. 3°. Le point discoidal des supérieures est plus gros, mais comme il n'est pas pupillé de blanc en dessous il sert à distinguer cette variété de la *phicomone*.

Si les hybrides n'étaient pas chose si rare on pourrait supposer que cette variété provient de l'*hyale* et de l'*edusa* ou ce qui revient au même de l'*hyale* et de l'*helice*.

N°. VANESSA URTICÆ *(L.) var. ichnusioides De Selys.*

Les taches noires des ailes supérieures ne sont qu'au nombre de quatre comme chez la *V. ichnusa* de Corse dont elle imite tout-à-fait le caractère le plus apparent. Elle est en outre atteinte de mélanisme sur une grande partie des ailes inférieures.

Cette variété extraordinaire a été prise une seule fois à Huy et fait partie de la collection de M. Donckier-Huart.

N°. 8. MELITEA ATHALIA *(Bork.) var. navarina De Selys.*

Toute brune en dessus avec une série antéterminale de taches fauves. Le dessous des ailes plus noir qu'à l'ordinaire. Le manque de points noirs dans l'une des séries des tâches des secondes ailes en dessous empêche de rapporter à la *dyctinna* cette variété qui est figurée dans l'ouvrage d'Engramelle pl. LXII f. 31 e-f. Elle est très rare et pas constante.

N°. 9. MELITEA ATHALIA *(Bork.) var. hisopa De Selys.*

Dessus des ailes brun. Les supérieures avec trois bandes de taches fauves très larges, les inférieures avec une seule bande analogue antéterminale. Dessous des inférieures avec quatre taches arrondies noires à la base qui est fauve. Cette couleur terminée par du noir. Le reste d'un jaune clair avec les nervures et une raie antéterminale noires et une série transverse de cinq taches fauves non cerclées de noir.

Elle m'a été donnée par feu M. Charles Robert qui l'avait prise une fois près de Liége. C'est une sous-variété de la *pyronia* de Hubner.

N°. 10. LYCÆNA AMYNTAS *(F.)* var. ? *myrmidon Engr.*

On a rapporté à une seule et même espèce ou variété sous le nom de *polysperchon Ochs.* (ou *tiresias* H.) une Lycæna, qui est au moins très-voisine de l'*amyntas*. Comme il me semble qu'il y a beaucoup de contradiction dans ce que les auteurs ont écrit à ce sujet, je dois conclure qu'ils ont eu plusieurs insectes différents sous les yeux ou bien qu'ils ont donné des descriptions inexactes. Ne voulant pas augmenter encore la confusion, je discuterai briè-

vement ce qui a été avancé sans prétendre décider de ce qui a rapport à la question spécifique proprement dite.

M. Duponchel, résume les observations d'Ochsenheimer, Hubner et Treitske, page 337 de son supplément, mais je ne puis faire concorder ce qu'il dit avec ce que j'ai observé.

1°. Selon lui la femelle de l'*amyntas* est totalement brune. — Or toutes celles de Belgique que j'ai vues sont saupoudrées de bleu en dessus (mais de grande taille et avec des lunules ovales fauves de part et d'autre).

2°. Son *tiresias* (ou *polysperchon*) aurait la massue des antennes toute brune. — Mais ce caractère semble dénié par M. Treitske lui-même et n'a plus été revu par personne depuis Ochsenheimer.

3°. Ce *tiresias* n'aurait pas de lunule fauve à l'angle anal des ailes inférieures en dessous — caractère que je remarque cependant chez des exemplaires reçus d'Allemagne sous le nom de *polysperchon* et qui ont seulement ces lunules plus petites que l'*amyntas*. Je possède à la vérité une femelle du Piémont où les lunules sont nulles de part et d'autre et où la massue des antennes est un peu moins fauve mais il se trouve précisément que cette femelle est brune et nullement saupoudrée de bleu en dessus. De sorte qu'elle ne peut se rapporter à aucune des deux espèces adoptées par M. Duponchel. Elle est de taille intermédiaire (12 lignes d'envergure).

M. Boisduval cite une autre variété d'après Ochsenheimer, sous le nom de *coretas*. J'en parle plus bas.

Enfin on trouve dans l'ouvrage du père Engramelle, sous le nom de *Myrmidon* une petite espèce qu'on a aussi rapportée au *polysperchon* ou *tiresias*. Mais ce myrmidon a les deux ou trois petites lunules anales fauves du dessous. Les ailes de la femelle sont saupoudrées de bleu à la base en dessus et le bord postérieur des secondes est marqué de taches bleues appuyées sur un point noir.

Je conclus provisoirement qu'il faut distinguer comme races ou variétés, peut-être même comme espèces :

A. L'*amyntas* proprement dit, de grande taille (13 à 14 lignes d'envergure) — à lunules anales fauves, grandes en dessous, reparaissant en dessus chez la femelle. Cette dernière, en Belgique du moins, est aussi saupoudrée de bleu en dessus que la plûpart des femelles de l'*Alexis*. (Mais MM. Duponchel, Guénée et Devillers n'ont vu en France que des femelles brunes. Ce serait une variété. Toutefois la première des descriptions de Godard, concorde tout-à-fait avec nos exemplaires de Belgique.)

B. Le *polysperchon* Bergstr. Oschsen. (*Tiresias* Hubn.) De petite taille, sans lunules anales fauves — j'y rapporterais volontiers la femelle brune non saupoudrée en dessus que j'ai reçue du Piémont (mais M. Duponchel dit positivement qu'elle est toujours saupoudrée. Ce serait une variété.). Il faut effacer le caractère tiré de la couleur des antennes. M. Donckier possède un exemplaire mâle des environs de Bordeaux; il n'a aucun point noir vers l'angle anal en dessus.

C. Le *myrmidon* Engramelle, de petite taille. Les lunules fauves anales petites en dessous, et ne reparaissant que peu ou point en dessus chez la femelle. Cette dernière saupoudrée de bleu en dessus et offrant souvent une bordure maculaire bleuâtre aux secondes ailes. J'y rapporte des mâles que j'ai reçus d'Allemagne sous le nom fautif de *polysperchon* et deux exemplaires de Belgique dont l'un a été pris à Namur par M. Pôlet de Faveaux et l'autre à Huy sur des rochers calcaires en mai et juin, tandis que l'*amyntas* paraît à la fin de juillet et en août. Ces *myrmidon* n'ont que 9 lignes environ d'envergure.

D. Le *coretas* Ochsenheimer. (De petite taille ?) — à lunule anale fauve très-petite, les taches ocellées du dessous des ailes sont petites et il serait dépourvu de la petite queue filiforme. Si ce dernier caractère n'est pas accidentel il s'indiquerai t une différence spécifique.

N°. 11. ZYGÆNA TRIFOLII (*Esp.*) var. *minoides, de Selys.*

Chez cette variété qui est plus ou moins caractérisée suivant les individus, les cinq points rouges des ailes supérieures sont réunis de manière à former une bande transverse comme chez la *Z. minos* mais de forme différente. Les ailes inférieures sont d'ailleurs bordées de noir comme chez les individus ordinaires.

N°. 12. BOMBYX NEUSTRIA (*L.*) var. *quercina, de Selys.*

Chez les individus ordinaires les ailes sont d'un brun roussâtre à peu près comme chez le *B. trifolii.* Les supérieures avec deux lignes transverses *jaunâtres.* Chez la variété que je signale les ailes sont d'un jaune assez clair comme chez la femelle du *B. quercûs* ou même plus clair encore. Les supérieures ont deux lignes transverse d'un *brun foncé.* Cette disposition d'avoir les deux lignes trans–

verses plus foncées que le fond lui donne un aspect singulier et analogue à celui du *B. castrensis* mâle. Je ne possède que des mâles.

N°. 13. BOMBYX NEUSTRIA *(L.)* var. *confluens*, *De Selys.*

Diffère des exemplaires ordinaires en ce que les deux lignes transverses sont confluentes au milieu et forment l'X. Je n'ai observé que des femelles de cette variété qui peut être plus ou moins prononcée.

N°. 14. CATOCALA SPONSA *(L.)* var. *desiderata*, *de Selys.*

Cet insecte serait regardé au premier abord pour une variété plus petite de la *C. dilecta* du midi de la France. Sa taille est celle de la *sponsa* proprement dite, mais le dessus des premières ailes, *notamment les taches ordinaires*, est au moins aussi rembruni que celui de la vraie *dilecta.*

Outre sa taille moindre on la distingue aussi de la *dilecta* en ce que la bande transverse médiane noire des ailes inférieures forme vers le sommet un angle droit ou même un peu aigu tandis que chez la *dilecta* cet angle est presqu'aussi obtus que chez la *promissa*, mais cette dernière à la bande susdite plus étroite.

M. Deltour, amateur Liégeois, l'a prise une fois aux environs de Liége en été — elle a été également recueillie à Huy et j'en possède un individu d'Allemagne qui m'a été envoyé sous le nom de *dilecta.*

N°. 15. EPHYRA PUNCTULARIA *(L.)* var. *hybridaria*, *de Selys.*

Intermédiaire entre la *punctularia* et la *trilinearia;* les lignes moins marquées que chez cette dernière, mais ne consistant pas en points comme chez la première qui d'ailleurs a souvent le disque des supérieures saupoudré de rougeâtre, ce qui ne se voit pas chez l'*hybridaria.*

Elle est commune en Belgique en été.

Je saisis l'occasion de la publication du travail que l'on vient de lire pour faire connaître deux lépidoptères que j'ai pris en Italie :

N°. 16. EUPISTHERIA PULVERULENTARIA, *de Selys.*

Port et taille de la *strenia clathraria* (11 lignes 1/4 d'envergure) ailes d'un blanc-jaune, lavées de jaune à la côte et au bord anal, toutes pointillées et finement tachées de brun — le brun saupoudré

de très petits points jaunâtres — frange brune entrecoupée de blanc à-peu-près comme chez la *strenia clathraria.*

Les points bruns par leur accumulation forment comme trois bandes onduleuses mal définies aux supérieures et deux aux inférieures — le bord postérieur est aussi brunâtre aux supérieures.

Le dessous est semblable au dessus — le corps et les pattes sont comme chez la *Strenia clathraria*, les antennes sont dentelées ou finement pectinées des deux côtés — c'est ce qui m'a engagé à en faire une *Eupistheria* près de la *concordaria* de la *zebraria* et de l'*hepararia*, tandis que les *Strenia* ont pour caractère d'avoir les antennes sétiformes et les ailes dessinées en réseau. — Elle a aussi des rapports avec les Acidalies du groupe de la *glarearia.* En réalité on ne devrait pas isoler génériquement ces groupes. Vue à une certaine distance on prendrait la *pulverulentaria* pour une *Strenia clathraria* et dans l'ordre naturel elle devrait en être rapprochée.

Décrite d'après un individu que j'ai pris vers la mi-mai au pied de l'acqueduc de Caserte, près de Naples. M. Boisduval pense qu'elle constitue une espèce nouvelle.

N°. 16. LYCÆNA ARION *(L.) var? aldrovandus*, *de Sélys.*

Cette lycénie est avec l'iolas la plus grande d'Europe, car elle a plus de 22 lignes d'envergure et les plus grands exemplaires de l'iolas atteignent à peine 22 lignes. En dessus elle diffère de l'*arion* en ce que ses ailes sont presqu'aussi rembrunies que chez la femelle de l'*erebus* la dernière moitié au delà de la série de taches noires n'étant pas saupoudrée de bleu. C'est une femelle; la frange est blanche et non entrecoupée en dessus, le corps semble proportionnellement plus court et les ailes plus arrondies.

Je l'ai prise au pied du Vésuve du côté de Resina au commencement de mai en 1838.

Ce n'est probablement qu'une belle variété locale.

NOTA.

Les *additions* et *corrections* seront données à la fin de ce volume.

II. *Théorie générale de la Polaire des courbes du second degré;*

Par M. LÉON LECOINTE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES A L'ATHÉNÉE ROYAL D'ARLON.

> Préférez dans l'enseignement les méthodes générales : attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple ; vous verrez en même temps qu'elles sont toujours les plus faciles.
> *Laplace*, *écoles normales*, Tom. IV, p. 49.

Entre tous les auteurs d'analyse appliquée à la géométrie des deux dimensions, *Bourdon* est le seul, du moins à ce que nous sachions, qui se soit un peu étendu sur le lieu géométrique nommé *polaire*, les autres n'en ont point parlé, ou ne s'en sont occupés que, pour ainsi dire, en passant.

Le problème général, dont nous ne nous proposons d'exposer que la discussion pour le cas tout particulier des courbes du second degré, est celui-ci : *Un point et une courbe quelconque étant donnés sur un plan, si, de ce point, on mène une sécante qui rencontre cette courbe en plusieurs points et que par ces points on mène des tangentes, on demande le lieu des points de rencontre de ces tangentes considérées deux à deux pour chaque sécante en particulier.*

Nous croyons devoir indiquer ici la division de cet opuscule.

Les articles 1 et 2 ne sont que des préliminaires ayant pour but de rechercher : l'équation générale de la tangente aux lignes du second degré ; celle d'un diamètre, pour en déduire la direction de son conjugué ; enfin les équations du centre.

Les articles 3, 4 et 5 recherchent l'équation de la polaire et du pôle ; quelques propriétés de celle-là et de celui-ci ; le parallélisme de la polaire du diamètre conjugué au diamètre passant par le pôle et des tangentes aux extrémités de ce dernier diamètre, ainsi que la dépendance qui existe entre la position de la polaire et celle du pôle.

L'article 6 est consacré aux applications des principes généraux de cette théorie à chacune des trois courbes du second degré; enfin nous donnons, dans le dernier article, diverses constructions graphiques pour tracer la polaire, le pôle étant donné ou réciproquement.

Cet opuscule est terminé par un appendice où nous exposons une nouvelle construction de l'hyperbole.

N. B. Nous appelons *direction* d'une droite, la tangente trigonométrique de l'angle qu'elle forme avec l'axe des abscisses, lorsque les axes sont rectangulaires ou bien, le rapport des sinus des angles que forme cette droite avec les axes coordonnées lorsque ceux-ci sont obliques.

ARTICLE 1er.

DE LA TANGENTE.

1. En adoptant la définition de tous les géomètres, nous considérerons la tangente comme *une sécante qui passe par deux points de la courbe, et qui ensuite tourne autour d'un de ces points jusqu'à ce que l'autre point vienne se confondre avec lui.* Ce point prend alors le nom de *point de contact.*

Soient $(x'y')$, $(x''y'')$ les deux points d'intersection de cette sécante, variable de position, avec la courbe du second dégré que nous représenterons par

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\phi).$$

N. B. Nous avons pris cette équation de préférence à celle ordinairement employée, parce qu'il nous semble que certaines fonctions de ses variables sont exprimées plus simplement.

Les points $(x'y')$, $(x''y'')$ étant sur la courbe (ϕ) donnent les relations suivantes

$$Ay'^2+2Bx'y'+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+F=0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . (1)$$
$$Ay''^2+2Bx''y''+Cx''^2+2Dy''+2Ex''+F=0 \; . \; . \; . \; . \; . (2)$$

et on aura

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x') \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (3)$$

pour l'équation de la sécante.

La direction $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ s'obtiendra en retranchant la relation (2) de celle (1), ce qui donne successivement

$$A(y'^2-y''^2)+2B(x'y'-x''y'')+C(x'^2-x''^2)+$$
$$2D(y'-y'')+2E(x'-x'')=0\,,$$
$$A(y'-y'')(y'+y'')+2Bx'(y'-y'')+2By''(x'-x'')+$$
$$C(x'-x'')(x'+x'')+2D(y'-y'')+2E(x'-x'')=0\,,$$
$$(y'-y'')[A(y'+y'')+2Bx'+2D]+$$
$$(x'-x'')[2By''+C(x'+x'')+2E]=0\,;$$

d'où
$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{2By''+C(x'+x'')+2E}{A(y'+y'')+2Bx'+2D}\,;$$

et substituant cette quantité dans (3) on obtient pour l'équation de cette sécante

$$y-y'=-\frac{2By''+C(x'+x'')+2E}{A(y'+y'')+2Bx'+2D}(x-x') \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Or, d'après la définition de la tangente, cette relation deviendra celle de la tangente au point $(x'y')$ en posant $x''=x'$, d'où $y''=y'$; ce qui fournit pour cette dernière

$$y-y'=-\frac{By'+Cx'+E}{Ay'+Bx'+D}\;(x-x')\,;$$

laquelle, développée et réduite au moyen de la relation (1), qui indique que le point $(x'y')$ est sur la courbe (ϕ), donne pour l'équation de la tengente en un point quelconque d'une courbe du second degré

$$Ayy'+B(xy'+yx')+Cxx'+D(y+y')+E(x+x')+F=0 \quad \ldots \quad (\tau).$$

N. B. En se conformant aux principes de l'analyse infinitésimale, nous obtiendrons l'équation de la tangente de la manière suivante :

Si $(x'y')$ représentent les coordonnées du point de tangence, l'équation de la tangente sera de la forme

$$y-y'=a(x-x')\,;$$

or, d'après les principes de l'analyse précitée, a, direction de la droite, est égale au coefficient différentiel du 1[er] ordre de l'équation de la courbe proposée, dans lequel on remplace les coordonnées générales par celles du point de contact. Donc, différentions l'équation (ϕ); nous aurons

$$\frac{dy}{dx}=a=-\frac{By'+Cx'+E}{Ay'+Bx'+D}\,;$$

laquelle valeur substituée dans l'équation $y-y'=a(x-x')$, fournit après développement et réduction résultant de ce que le point $(x'y')$ est sur la courbe (ϕ)

$$Ayy'+B(xy'+yx')+Cxx'+D(y+y')+E(x+x')+F=0,$$

équation qui n'est autre que celle (τ) trouvée précédemment.

ARTICLE 2[me].

ÉQUATION D'UN DIAMÈTRE. — DIRECTION DE SON CONJUGUÉ. — ÉQUATION DU CENTRE DE LA COURBE.

2. Soit encore l'équation générale des courbes du second degré

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0 \quad \ldots\ldots \quad (\phi),$$
$$\text{et} \quad y=mx+n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

celle d'un système de cordes parallèles de direction m. On demande l'équation *du lieu géométrique milieu de ces cordes*, c'est-à-dire l'équation de leur *diamètre*.

A cet effet, remarquons que les abscisses des extrémités de ces cordes s'obtiendront en éliminant y entre les équations (ϕ) et (1), en faisant toutefois passer la constante n, variable d'une corde à l'autre, par tous les états de grandeur par lesquels elle peut passer sans cesser d'être une corde de la courbe (ϕ). Cette élimination donne

$$x^2+2\frac{Amn+Bn+Dm+E}{Am^2+2Bm+C}x+\frac{An^2+2Dn+F}{Am^2+2Bm+C}=0 \quad \ldots \quad (2),$$

si nous appelons x', x'' les racines de cette équation et les x_1 y_1 coordonnées du milieu de ces cordes, nous aurons, en vertu d'un principe des équations du second degré et de ce que les coordonnées du milieu d'une droite sont respectivement égales à la demi-somme des coordonnées des extrémités,

$$x_1=\frac{x'+x''}{2}=-\frac{Amn+Bn+Dm+E}{Am^2+2Bm++C},$$
$$y_1=mx_1+n.$$

Or, le système de ces deux équations représentera évidemment le lieu cherché; mais en éliminant la quantité n variable d'une

corde à l'autre, nous obtiendrons l'équation unique d'un diamètre qui est alors

$$y(\mathrm{A}m+\mathrm{B})+x(\mathrm{B}m+\mathrm{C})+\mathrm{D}m+\mathrm{E}=0 \;\ldots\ldots$$

$$\text{ou } y=-\frac{\mathrm{B}m+\mathrm{C}}{\mathrm{A}m+\mathrm{B}}x-\frac{\mathrm{D}m+\mathrm{E}}{\mathrm{A}m+\mathrm{B}} \;\ldots\ldots\ldots \text{(D)}$$

Donc, le lieu géométrique du milieu d'un système de cordes parallèles entre elles est *une ligne droite*, pour les courbes du second dégré.

3. Deux diamètres étant conjugués lorsque les cordes de l'un sont parallèles à l'autre et que les cordes de celui-ci sont parallèles au premier, il s'ensuit, qu'en ayant égard aux équations (1) et (D), si m représente la direction d'un diamètre, celle m' de son conjugué sera

$$m'=-\frac{\mathrm{B}m+\mathrm{C}}{\mathrm{A}m+\mathrm{B}}.$$

4. Les équations du centre nous seront fournies par l'équation (D) en remarquant que ce point devant se trouver sur tous les diamètres, ses coordonnées devront la vérifier quelle que soit la direction m des cordes conjuguées ; donc, ordonnant la relation (D) par rapport à m et égalant à zéro les coefficiens des diverses puissances de m, nous aurons successivement

$$m(\mathrm{A}y+\mathrm{B}x+\mathrm{D})+m^{\circ}(\mathrm{B}y+\mathrm{C}x+\mathrm{E})=0\,;$$

$$\mathrm{A}y+\mathrm{B}x+\mathrm{D}=0 \quad \text{et} \quad \mathrm{B}y+\mathrm{C}x+\mathrm{E}=0 \quad (3)$$

pour les équations du centre. Si nous appelons x_1, y_1 les coordonnées de ce point nous obtiendrons

$$x_1=-\frac{\mathrm{BD}-\mathrm{AE}}{\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}} \quad \text{et} \quad y_1=-\frac{\mathrm{BE}-\mathrm{DC}}{\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}}.$$

N. B. Il est aisé de s'assurer que les équations (3) du centre ne sont autre chose que les *dérivées* de la fonction (ϕ), relatives à y et à x ; et il en est de même pour toutes les autres courbes de quelque degré qu'elles soient.

ARTICLE 3me.

DE LA POLAIRE.

5. *Une courbe du second degré et un point étant donnés sur un plan, si, de ce point, on tire une sécante quelconque qui rencontre la courbe en deux points, et que par ces points on mène des tangentes à la courbe, on demande le lieu de tous les points tels que celui où ces tangentes se rencontrent.*

N. B. Ce lieu géométrique se nomme *polaire*, et le point où se croisent toutes les sécantes s'appelle *pôle*.

Considérons l'équation des lignes du second degré

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0 \;\ldots\ldots\; (\phi)$$

représentons par (X,Y) les coordonnées du pôle; une sécante quelconque passant par ce point aura pour équation

$$y-Y=a(x-X);$$

et si $(x',y'),(x'',y'')$ sont les points d'intersection de cette droite avec la courbe (ϕ), nous aurons, en faisant disparaître la constante a de cette sécante,

$$y-Y=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-X') \;\ldots\ldots\ldots\; (1).$$

Les points (x',y'), (x'',y'') étant sur la courbe (ϕ) nous donnent les deux relations suivantes:

$$Ay'^2+2Bx'y'+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+F=0, \;\ldots\ldots\; (2)$$
$$Ay''^2+2Bx''y''+Cx''^2+2Dy''+2Ex''+F=0; \;\ldots\ldots\; (3)$$

et les équations (τ) des tangentes aux mêmes points seront

$$Ayy'+B(xy'+yx')+Cxx'+D(y+y')+E(x+x')+F=0. \ldots\; (4)$$
$$Ayy''+B(xy''+yx'')+Cxx''+D(y+y'')+E(x+x'')+F=0 \ldots\; (5).$$

Or, de ce que les équations (4) et (5) considérées simultanément donneront les coordonnées d'un point du lieu cherché, il s'ensuivra que la $F(x,y)=0$ résultant de l'élimination des variables x',y',x'' et y'' entre les équations (1), (2), (3), (4) et (5) sera la relation de la polaire. Pour effectuer cette élimination, il nous suffira, à cause d'une circonstance toute particulière (3me remarque), de retrancher

(5) de (4) et de substituer la valeur de $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ que nous en tirerons dans l'équation (1); ce qui nous donne successivement

$$Ay(y'-y'')+B[x(y'-y'')+y(x'-x'')]+Cx(x'-x'')+D(y'-y'')+E(x'-x'')=0;$$

d'où
$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{By+Cx+E}{Ay+Bx+D},$$

valeur qui donne pour l'équation du lieu en la substituant dans (1)

$$y-Y=-\frac{By+Cx+E}{Ay+Bx+D}(x-X),$$

fonction qui, développée et réduite au moyen de celle (ϕ), donne

$$AYy+B(Yx+Xy)+CXx+D(Y+y)+E(X+x)+F=0 \ldots\ldots (\pi).$$

Cette équation (π) nous démontre qu'étant du premier degré, elle représente *une ligne droite*, et que parconséquent *la polaire est telle pour toutes les courbes du second degré.*

1re *Remarque.* L'équation (π) mise sous la forme $y=px+q$, donnant
$$y=-\frac{BY+CX+E}{AY+BX+D}x-\frac{DY+EX+F}{AY+BX+D},$$

nous indique que la direction de la polaire est

$$p=-\frac{BY+CX+E}{AY+BX+D},$$

et nous constaterons (N°. 8) que cette direction n'est autre que *celle du diamètre conjugué au diamètre passant par le pôle.*

2me *Remarque.* Cette relation (π) de la polaire ne différant de celle (τ) de la tangente qu'en ce que les coordonnées (X,Y) du pôle remplacent celles (x',y') du point de contact, nous pouvons déjà en conclure que *lorsque le pôle sera situé sur la courbe, la polaire lui sera tangente en ce point.* Nous démontrerons plus loin ce théorème par une autre analyse.

3me *Remarque.* La simplicité de l'élimination précédente tient à cette circonstance toute particulière que les équations (2) et (3) sont implicitement comprises dans celles (4) et (5); et c'est aussi le motif du non emploi des deux premières.

6. A l'effet de démontrer la réciproque de la proposition précédente, proposons-nous de *mener des couples de tangentes à une*

courbe du second degré, par les différents points d'une droite située dans le plan de cette courbe.

Pour cela, supposons la courbe rapportée à un système d'axes obliques dont l'un (l'axe des y) soit parallèle à la droite donnée et l'autre soit le diamètre conjugué de celui qui serait parallèle à cette même droite; la $F(x,y)$ des courbes du second degré prend la forme

$$Ay^2+Cx^2+2Ex+F=0 \ldots\ldots (\Phi').$$

Cette forme s'obtient immédiatement en observant que la disposition des coordonnées exige que chaque valeur de l'abscisse donne pour l'ordonnée, deux valeurs égales et de signes contraires.

Et soit

$$x=b,$$

l'équation de la droite; représentons par (x',y') un des points de cette droite, duquel nous mènerons deux tangentes à la courbe (Φ') et par (x'',y'') le point de contact d'une des tangentes; cette tangente aura pour équation

$$Ayy''+Cxx''+E(x+x'')+F=0 \ldots\ldots (1)$$

et les coordonnées $(x''y'')$ seront déterminées par les deux relations suivantes, données par les considérations que le point $(x'y')$ est situé sur la tangente et l'autre $(x''y'')$ sur la courbe (Φ') :

$$Ay'y''+Cx'x''+E(x'+x'')+F=0 \ldots\ldots (2)$$
$$Ay''^2+Cx''^2+2Ex''+F=0 \ldots\ldots\ldots (3).$$

A l'élimination laborieuse qu'il faudrait effectuer pour obtenir les coordonnées (x'',y''), nous préférerons la construction directe des lieux géométriques que ces relations représentent, lesquels par leur intersection détermineront le point ou les points demandés.

Remarquons que l'équation (3) n'est autre chose que la courbe (Φ') elle-même; quant à celle (2), elle représente une droite que nous allons construire au moyen de ses coordonnées à l'origine. Pour cela posons successivement

$$\left.\begin{matrix} y''=0 \\ x''=0 \end{matrix}\right\} \text{ il en résulte } \left\{\begin{matrix} x''=-\dfrac{F+Ex'}{E+Cx'} \\ y''=-\dfrac{F+Ex'}{Ay'} \end{matrix}\right\};$$

or, ces deux valeurs construites détermineront évidemment une

droite dont les intersections avec la courbe (Φ') donneront les points de contact des deux tangentes menées du point (x',y') à la courbe (Φ').

Observons que l'abscisse à l'origine $x'' = -\frac{F+Ex'}{E+Cx'}$, étant indépendante de y', détermine un point

$$y''=0 \qquad \text{et} \qquad x''=-\frac{F+Ex'}{E+Cx'},$$

par lequel passeront toutes les droites joignant les points de contact des tangentes menées par tous les points de la droite proposée, puisque celle-ci a pour équation

$$x=b;$$

delà nous conclurons :

1° *Si des différents points d'une ligne droite, tracée sur le plan d'une ligne du second degré, on mène des tangentes à cette courbe et qu'on joigne successivement les points de contact relatifs à chaque couple de tangentes, toutes les lignes de jonction jouissent de la propriété de concourir en un même point.* C. Q F. D.

2° *Ce point nommé pôle se trouve placé sur le diamètre conjugué du diamètre parallèle à la polaire.*

La position de ce point résulte évidemment de la valeur de ses coordonnées.

Nous démontrerons (N° 8) que, réciproquement *la polaire est parallèle au diamètre conjugué du diamètre passant par le pôle.*

3° *La ligne qui joint les points de contact de deux tangentes menées par un point quelconque de la polaire, est divisée en deux parties égales par le diamètre qui passe par ce point, et est parallèle au conjugué de ce diamètre.*

En effet, si l'on choisit pour point de départ des tangentes à la courbe celui où la droite rencontre l'axe des abscisses, lequel est

$$y'=0, \qquad x'=b;$$

la relation $y'=0$ substituée dans (2) donne

$$x''=-\frac{F+Ex'}{E+Cx'}$$

quantité qui mise dans (3) donnera pour y'' deux valeurs égales et de signes contraires. C. Q F. D.

7. Si nous eussions pris pour pôles, les *foyers* des courbes du second degré; nous eussions obtenu pour polaires les *directrices* de ces courbes, et réciproquement en prenant pour *polaires* ces

directrices nous obtiendrons pour *pôles*, ces mêmes foyers. C'est ce que nous ferons voir pour chaque courbe en particulier à l'article des applications.

ARTICLE 4me.

PARALLÉLISME DE LA POLAIRE, DU DIAMÈTRE CONJUGUÉ AU DIAMÈTRE PASSANT PAR LE PÔLE ET DES TANGENTES AUX EXTRÉMITÉS DE CE DERNIER DIAMÈTRE.

8. Rappelons-nous que nous avons trouvé (N° 4) pour les coordonnées du centre

$$x_1 = -\frac{BD-AE}{B^2-AC} \quad \text{et} \quad y_1 = -\frac{BE-DC}{B^2-AC};$$

donc le diamètre passant par le pôle (X,Y) aura pour sa direction m, $(X-x_1)m=Y-y_1$; d'où en substituant et réduisant, il vient

$$m = \frac{Y(B^2-AC)+BE-DC}{X(B^2-AC)+BD-AE}.$$

Son conjugué aura donc pour directrion m' (N° 3), $(Am+B)m'=-Bm-C$; d'où en substituant la valeur précédente de m, puis développant et réduisant, par la suppression du facteur commun B^2-AC, il vient

$$m' = -\frac{BY+CX+E}{AY+BX+D}.$$

Or, cette expression est celle trouvée (N° 5. 1re remarque) pour la direction de la polaire. Donc *la polaire est parallèle au diamètre conjugué du diamètre passant par le pôle.*

9. *La polaire est parallèle aux tangentes menées aux extrémités du diamètre passant par le pôle.*

En effet, ce théorème résulte de cet autre bien connu : *les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles à son conjugué* et par conséquent *entre elles.*

Remarquons de plus, que ces tangentes étant parallèles, leur point d'intersection, qui doit être un point de la polaire, ne peut être situé qu'à l'infini ; ce qui prouve de nouveau que *ces tangentes doivent être parallèles à la polaire.*

10. Il résulte de cet article que p, m' et m'' étant les directions

d'une polaire, du diamètre conjugué au diamètre polaire et des tangentes aux extrémités de ce dernier diamètre, ces trois quantités sont liées entre elles par les égalités

$$p=m'=m''. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

ARTICLE 5me.

POSITIONS QU'AFFECTE LA POLAIRE SUIVANT CELLES DU PÔLE.

11. Nous nous proposons de faire voir dans cet article qu'on ne peut dire : *la polaire est une ligne droite*, et qu'il faut s'exprimer ainsi : *les points de la polaire se trouvent en ligne droite*.

En effet, considérons l'équation des lignes du second dégré, ainsi que celle de leur polaire

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0 \ldots . (\phi).$$
$$AYy+B(Yx+Xy)+CXx+D(Y+y)+E(X+x)+F=0 \ (\pi)$$

Ces deux équations prises simultanément donneront les coordonnées des points communs à ces deux lieux géométriques et de la valeur de ces coordonnées, indiquant la *réalité* ou l'*imaginarité* de ces points, nous pourrons en conclure la position d'une de ces lignes par rapport à l'autre. Cette élimination étant effectuée donnerait pour l'abscisse x_3 de ces points une valeur telle que le radical renfermerait sous son signe l'expression suivante

$$AY^2+2BXY+CX^2+2DY+2EX+F \ldots . . (\mu)$$

Or, cette expression (μ) étant *nulle*, *positive* ou *négative* suivant que le pôle est situé *sur* la courbe, à l'*extérieur* ou à l'*intérieur*, elle nous donne pour les valeurs de l'abscisse x_3 des quantités *réelles*, *égales* ou *inégales*, ou bien *imaginaires ;* donc pour ces différentes positions du pôle, la polaire sera *tangente*, *sécante* ou bien *extérieure* à la courbe.

Puisque de l'analyse précédente il résulte que, lorsque le pôle est situé à l'*extérieur* de la courbe, la polaire *est sécante* à la courbe ; donc, il est faux de conclure, de ce que les points de la polaire sont donnés par une équation du premier degré, que *ce lieu est une ligne droite* et qu'il est plus rigoureux, puisqu'il peut y avoir *discontinuité*, de s'exprimer ainsi : *tous les points de la polaire sont en ligne droite.*

Remarque. Si pour obtenir la valeur de x, nous n'avons pas effectué l'élimination de y entre (ϕ) et (π), c'est que cette élimination est trop laborieuse et qu'elle est inutile du moment que l'on connaît la quantité comprise sous le radical, quantité qui détermine seule la *réalité* ou l'*imaginarité* des points de section de ces deux lieux et qui nous a été fournie par l'*Analogie* en considérant les résultats analogues qui nous ont été donnés pour les trois courbes du second degré (Article 6).

12. On peut, du reste, parvenir aux mêmes résultats que précédemment par d'autres considérations.

A cet effet, reprenons la disposition des axes coordonnées du N° 6, alors la courbe, la polaire et le pôle auront pour équations

$$Ay^2+Cx^2+2Ex+F=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\phi')$$

$$x=b, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\pi'')$$

$$Y=0, \qquad X=-\frac{F+Eb}{E+Cb} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\rho).$$

Pour obtenir les points où la courbe rencontre les axes nous poserons $y=0$ dans (ϕ') ; ce qui donne

$$Cx^2+2Ex+F=0 \qquad \text{ou} \qquad Cx=-E\pm\sqrt{E^2-CF}.$$

Nous disons actuellement que si le pôle est *intérieur*, *sur* ou *extérieur* à la courbe, la polaire sera *extérieure*, *tangente* ou *sécante* à la courbe; ce qui revient évidemment à prouver que pour les relations :

$$-\frac{F+Eb}{E+Cb} <,= \text{ou} > -\frac{E}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF}, \quad (1)$$

on aura $\qquad b>,= \text{ou} <-\frac{E}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF} \quad (2).$

En effet, les relations (1) donnent, en changeant les signes et après transposition du terme $-\frac{E}{C}$,

$$\frac{F+Eb}{E+Cb}-\frac{E}{C}>,= \text{ou} <\mp\frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF}.$$

Réduisant le premier membre au même dénominateur, faisant la réduction des termes semblables et multipliant les deux membres par C ;

$$\frac{FC-E^2}{E+Cb}>,= \text{ou} <\mp\sqrt{E^2-CF}.$$

renversant les deux fractions

$$\frac{E+Cb}{FC-E^2}>,=\text{ ou }<\mp\frac{1}{\sqrt{E^2-CF}}.$$

Multipliant les deux membres par $FC-E^2$, puis observant que $\mp(FC-E^2)=\pm(E^2-FC)$ et réduisant, il vient $E+Cb>,=$ ou $<\sqrt{\pm(E^2-CF)}$; d'où

$$b>,=\text{ ou }<-\frac{E}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF}.\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

13. La réciproque de cette proposition se démontrerait de la même manière, car si nous partions des relations

$$b>,=\text{ ou }<-\frac{E}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF},$$

nous arriverions par les transformations précédentes, mais exécutées dans un ordre inverse, à

$$-\frac{F+Eb}{E+Cb}<,=\text{ ou }>-\frac{E}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF},$$

relations qui nous prouvent que lorsque la polaire est *extérieure*, *sur* ou *intérieure* à la courbe, le pôle est situé à l'*intérieur*, *sur* ou à l'*extérieur* de la courbe.

Remarque. Ces démonstrations (N°s. 12 et 13) compléteront, nous semble-t-il, ce que pourrait avoir de non rigoureux la théorie du N° 11. Cependant nous nous hâterons d'ajouter que la méthode du N° 11 sera tout aussi rigoureuse pour quiconque aura bien saisi la précieuse méthode ANALOGIQUE.

ARTICLE 6me.

APPLICATION DES PRINCIPES GÉNÉRAUX PRÉCÉDENS AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

Cercle.

14. L'équation de cette ellipse particulière rapportée à son centre et à des axes rectangulaires, s'obtient en posant dans l'équation générale (Φ) $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=0$, $E=0$ et $F=-R^2$; d'où

$$y^2+x^2=R^2 \;\ldots\ldots\; (\Phi'')$$

et pour les équations de la polaire et de la tangente

$$Yy+Xx=R^2 \ldots\ldots (\pi'')$$
$$y'y+x'x=R^2 \ldots\ldots (\tau'')$$

Les directions de la polaire, du diamètre conjugué au diamètre polaire (en appelant ainsi celui qui passe par le pôle) et celles des tangentes aux extrémités de ce dernier diamètre, seront donnés (nos 5, 8 et 9) par

$$Yp=-X, Ym'=-X \text{ et } Ym''=-X\,;$$

d'où l'on conclut

$$p=m'=m''.$$

En considérant simultanément les lieux (ϕ'' et π'') nous obtiendrons pour l'abscisse des points d'intersection

$$(X^2+Y^2)x_2=R^2X\pm RY\sqrt{X^2+Y^2R-R^2}\,;$$

valeurs *imaginaires*, *réelles égales* ou *inégales* suivant les relations

$$X^2+Y^2-R^2<,= \text{ ou } >0\,;$$

et ces inégalités indiquent que le pôle est à l'*intérieur*, *sur* ou à l'*extérieur* de la courbe, ce qui déterminent bien nettement la position de la polaire.

15. Lorsque le pôle est sur la courbe la relation $X^2+Y^2-R^2=0$ nous donne

$$x_2=X,\ y_2=Y\,;$$

ce qui nous indique que le pôle est le point de tangence de la polaire et par conséquent un des points de ce lieu.

Ellipse.

16. Nous obtiendrons la fonction de cette courbe rapportée à son centre et à ses axes en posant dans l'équation (ϕ)

$$A=A^2, B=0, C=B^2, D=0, E=0 \text{ et } F=-A^2B^2, \text{ d'où}$$
$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \ldots\ldots (\phi'').$$

les équations de la polaire et de la tangente seront

$$A^2Yy+B^2Xx=A^2B^2 \ldots\ldots (\pi'')$$
$$A^2y'y+B^2x'x=A^2B^2 \ldots\ldots (\tau'')$$

nous obtiendrons donc aussi, successivement,

$$A^2Yp=-B^2X, A^2Ym'=-B^2X \text{ et } A^2Ym''=-B^2X,$$

pour les directions de la polaire, du diamètre conjugué au diamètre polaire et des tangentes aux extrémités de ce dernier diamètre;

d'où $$p=m'=m''.$$

En éliminant y entre les équations (ϕ'') et (π''), nous aurons pour les abscisses des points d'intersection

$$(A^2Y^2+B^2X^2)x_3=A^2B^2X\pm A^2Y\sqrt{A^2Y^2+B^2X^2-A^2B^2},$$

points qui seront *imaginaires*, *réels simples* ou *doubles* suivant les relations

$$A^2Y^2+B^2X^2-A^2B^2<,= \text{ ou } >0;$$

lesquelles placent le pôle *intérieurement*, *sur* ou *extérieurement* à la courbe; donc pour ces différents cas, la polaire sera *extérieure*, *tangente* ou *sécante* au lieu (ϕ'').

17. La relation $A^2Y^2+B^2X^2-A^2B^2=0$, qui existe lorsque le pôle est sur la courbe, donne

$$x_3=X, \qquad y_3=Y;$$

valeurs qui nous indiquent et la position du pôle est le point de contact de la polaire.

18. Proposons-nous de rechercher le rapport $d:d'$ des distances d'un point de l'ellipse à un de ses foyers et à la polaire dont le pôle serait ce même foyer.

Nous aurons donc pour les équations du pôle et de la polaire

$$Y=0, \quad X=\pm\sqrt{A^2-B^2}=\pm c,$$

(en appelant $2c$ l'excentricité), et

$$x=\frac{A^2}{\pm c}.$$

Or,

$$d=A\mp\frac{cx}{A} \quad \text{et} \quad d'=\frac{A^2}{\pm c}-x;$$

d'où $$A\mp\frac{cx}{A}:\frac{A^2}{\pm c}-x::c:A;$$

donc, de ce que ces distances *sont entre elles comme l'excentricité*

est au grand axe ; nous pouvons en conclure, puisque cette propriété *est celle des directrices*, que cette polaire est une *de ces lignes* (N° 7).

Hyperbole.

19. En faisant sur les coefficiens de l'équation (ϕ) des hypothèses faciles à prévoir, on obtiendra successivement pour les équations de cette courbe, de sa polaire, de sa tangente, ainsi que pour les directions de sa polaire, du diamètre conjugué au diamètre polaire et pour celles des tangentes aux extrémités de ce dernier diamètre

$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2 \ldots\ldots (\phi'')$$
$$A^2Yy-B^2Xx=-A^2B^2 \ldots\ldots (\pi'')$$
$$A^2y'y-B^2x'x=-A^2B^2 \ldots\ldots (\tau'')$$
$$A^2Yp=B^2X=A^2Ym'=A^2Ym'' ;$$

d'où, de ces trois dernières relations

$$p=m'=m''.$$

Les équations (ϕ'') et (π'') prises simultanément fournissent, pour les points communs de ces deux lieux géométriques,

$$(A^2Y^2-B^2X^2)x_2=-A^2B^2X\pm A^2Y\sqrt{A^2Y^2-B^2X^2+A^2B^2} ;$$

valeurs qui indiquent que la polaire sera *extérieure*, *tangente* ou *sécante* suivant que

$$A^2Y^2-B^2X^2+A^2B^2<,= \text{ ou } >0 ;$$

et ces relations correspondent aux différentes situations du pôle par rapport à la courbe.

20. En substituant dans la valeur de x_3 la relation $A^2Y^2-B^2X^2+A^2B^2=0$, qui indique que le pôle est situé sur l'hyperbole, on obtient de même que pour les courbes précédentes

$$x_3=X, \qquad y_3=Y,$$

pour le point de tangence de ces deux lignes.

21. Comme pour l'ellipse, proposons-nous *de rechercher le rapport $d:d'$ des distances d'un point de l'hyperbole à un de ses foyers et à la polaire dont le pôle serait ce même foyer.* Nous obtiendrons pour les équations du pôle et de la polaire

$$Y=0, \quad X=\pm\sqrt{A^2+B^2}=\pm c,$$

(2c étant l'excentricité), et

$$x = \frac{A^2}{\pm c}.$$

Or,

$$d = \frac{cx}{A} \mp A \quad \text{et} \quad d' = x - \frac{A^2}{\pm c};$$

d'où
$$\frac{cx}{A} \mp A : x - \frac{A^2}{\pm c} :: c : A.$$

Donc, de ce que ces distances *sont entre elles comme l'excentricité est au grand axe*, nous en concluerons, puisque cette propriété *est celle des directrices*, que cette polaire *est une de ces droites.*

Parabole.

22. Posons dans les résultats généraux obtenus précédemment $A=1$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, $E=-2p'$ et $F=0$; nous obtiendrons pour cette ligne, les résultats qui suivent; lesquels donnent les mêmes conséquences que celles précédemment obtenues pour les autres courbes du second degré :

$$y^2 = 2p'x \,.\,.\,.\,.\,.\, (\phi'')$$
$$Yy = p'(X+x) \,.\,.\,.\,.\,.\, (\pi'')$$
$$y'y = p'(x'+x) \,.\,.\,.\,.\,.\, (\tau'')$$

$$Yp = p' = Ym' = Ym'';$$

d'où
$$p = m' = m''$$

De même, les équations simultanées (ϕ'') et (π'') donneront

$$p'x_3 = Y^2 - p'X \pm Y\sqrt{Y^2 - 2p'X};$$

et pour le cas $Y^2 - 2p'X = 0$,

$$x_3 = X \quad \text{et} \; y_3 = Y.$$

23. Si nous prenons pour pôle, le foyer de cette courbe, ce point et sa polaire auront pour équations

$$Y=0, \; X = \frac{p'}{2}$$

$$x = -\frac{p'}{2}. \quad (\pi'')$$

Les distances d et d' de ce point et de cette droite à un point de a parabole donneront

$$d=d'=x+\frac{p'}{2},$$

or, cette propriété *est celle qui caractérise la directrice ;* donc, *cette droite* n'est autre chose *que la polaire qui a pour pôle, le foyer de la courbe.*

Prouvons encore cette identité en faisant voir *que deux tangentes à la courbe, menées par un point quelconque de cette polaire, font entre elles un angle droit* (autre propriété de la directrice remarquée par Biot).

En effet, les équations de ces droites seront, si $(x'y')$, $(x''y'')$ sont les points de contact,

$$yy'=p'(x+x'), \quad . \; . \; . \; (1)$$
$$yy''=p'(x+x''); \quad . \; . \; . \; (2)$$

et les directions

$$y'\delta=p',$$
$$y''\delta'=p'.$$

De plus, les points de contact nous donnent

$$y'^2=2p'x' \qquad (3)$$
$$y''^2=2p'x''. \qquad (4)$$

Or, les équations (1) et (2) donnant, par l'élimination de y, l'abscisse du point de rencontre de ces deux tangentes, lequel point doit se trouver sur la polaire (x'''), on a

$$x=\frac{y'x''-x'y''}{y''-y'}=-\frac{p'}{2};$$

et cette relation nous donne, par la substitution des valeurs de x' et x'', tirées de (3) et (4),

$$y'y''=-p'^2;$$

produit qui démontre le problème énoncé, puisqu'étant substitué dans celui $\delta\delta'$ des directions, il nous donne

$$\delta\delta'=-1.$$

ARTICLE 7e.

CONSTRUCTION DE LA POLAIRE ET DU PÔLE.

24. Pour compléter la théorie du lieu dont nous nous sommes occupé, nous allons indiquer les constructions propres à trouver *graphiquement* la polaire, le pôle étant fixé de position ou réciproquement.

Puisque la polaire est une droite, il est évident que deux de ses points ou bien un point et sa direction la détermineront.

Pour construire deux points de cette ligne, il suffit de mener par le pôle deux sécantes; les couples de tangentes aux points de sections donneront les points demandés.

Un point de la polaire étant construit par la méthode précédente, on aura ce lieu, en menant par ce point une droite parallèle aux cordes conjuguées du diamètre polaire (No 8).

Lorsque le pôle sera extérieur, il suffira de mener de ce point deux tangentes, à la courbe et la droite passant par les points de contact sera la polaire.

En effet, chaque point de contact est un point de la polaire, en ce qu'il peut être regardé comme l'intersection de deux tangentes dont les points de tangence, tout en étant en ligne droite avec le pôle se sont confondus avec leur point de rencontre.

Enfin, si le pôle est situé sur la courbe, la tangente en ce point sera évidemment la droite cherchée.

25. La construction du pôle se réduit à obtenir deux droites qui le renferment, ainsi on peut mener par deux points de la polaire, deux couples de tangentes; et l'intersection des cordes de contact déterminera ce point.

Le pôle sera également déterminé par la rencontre d'une corde de contact avec le diamètre conjugué des cordes parallèles à la polaire (N° 8).

Lorsque la polaire sera sécante, il est évident que l'intersection des tangentes, aux points où ce lieu coupe la courbe, sera le point demandé.

Enfin, si la polaire est tangente à la courbe, le point de contact sera lui-même le pôle.

APPENDICE.

CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE.

La construction que nous proposons pour l'hyperbole nous a été suggérée par l'analogie qui existe entre l'équation de cette courbe et celle de l'ellipse.

L'équation de l'hyperbole

$$A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2$$

rapportée à son centre et à ses axes, étant résolue par rapport à l'ordonnée y, donne la proportion

$$A:B::\sqrt{x^2-A^2}:y. \quad (1)$$

Donc, l'ordonnée y peut s'obtenir par des quatrièmes proportionnelles aux quantités A, B et $\sqrt{x^2-A^2}$ et nous proposons leur obtention par la méthode suivante (fig. 1) :

Sur le grand axe (réel) $CC'=2A$ et sur le petit axe (imaginaire) $DD'=2B$, comme diamètres, décrivons deux circonférences concentriques ; de plus sur l'abscisse quelconque $x=OP$, comme diamètre, décrivons une troisième circonférence ; laquelle par sa rencontre avec celle décrite sur l'axe réel déterminera

$$HP=H'P=\sqrt{OP^2-OH^2}=\sqrt{x^2-A^2}.$$

Maintenant des points K et K' de rencontre des rayons OH et OH' avec le cercle de l'axe imaginaire, menons les tangentes $K\phi$ et $K'\phi$ à ce dernier cercle ; et $K\phi=K'\phi$ sera l'ordonnée y correspondant à l'abscisse $OP=x$. En effet, les triangles semblables OHP et $OK\phi$ donnent

$$OH:OK::HP:K\phi,$$

ou

$$A:B::\sqrt{x^2-A^2}:K\phi;$$

proportion qui, étant comparée à celle (1), nous donne

$$y=K\phi. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Donc, si nous portons la portion de tangente $K\phi$ de P en M et M', et de P' en M'' et M''' sur les perpendiculaires MM' et M''M''', nous aurons quatre points de la susdite courbe : les autres points se détermineront de la même manière.

Cette construction très simple, puisque tout se réduit à construire, pour chaque abscisse, la tangente $K\phi$, offre l'avantage de montrer la forme de la courbe.

En effet, les ordonnées de ce lieu ne sont que les portions des tangentes, aux différents points du quadran DE, comprises entre les points de contact et le grand axe; et comme aux points D et D' les tangentes sont parallèles au grand axe, il s'ensuit que les ordonnées qu'elles doivent déterminer sont infinies; donc, de ce que la courbe est symétrique par rapport à ses axes, nous pourrons conclure qu'elle se compose de deux branches infinies, se tournant leur convexité et s'étendant dans le sens des abscisses positives et négatives.

NOTES COMPLÉMENTAIRES.

Nous avons appris, depuis la composition de ce mémoire, que M. Page, s'est occupé du même sujet dans le complément de sa géométrie analytique; qu'il a même considéré l'équation la plus générale des courbes du second degré ; de plus, que MM. Brasseur et Noël ont traité le même texte, dans des ouvrages semblables.

Nous donnons ici quelques notes, devant servir de complément à notre travail.

Nous démontrerons dans la première un théorème dont l'énoncé nous a été communiqué par M. Noël; dans la seconde et la troisième quelques propositions que M. Noël donne également, pour le cas du cercle, dans ses notes et additions à sa géométrie élémentaire.

Dans la troisième note, nous faisons usage d'une propriété des transversales partant d'un même point et coupant une courbe du second degré ; propriété démontrée par Jacob, dans son traité sur l'application de l'Algèbre à la Géométrie (1842), et d'autant plus belle que le lieu nommé polaire n'en est qu'une conséquence particulière, ce dont l'auteur ne fait pas mention, ce qui du reste se comprend puisqu'il ne s'est occupé de la polaire que, pour ainsi dire, en passant, sans même la désigner par son nom.

NOTE I.

Quelques définitions nous étant nécessaires pour établir le théorème, but de cette note, nous les rappellerons au lecteur.

1. On nomme *transversale*, toute ligne qui coupe le système de plusieurs autres lignes en le *traversant*. Telle est la définition de Carnot, auteur de la théorie des *Transversales*.

2. Lorsque quatre points en ligne droite sont situés de telle sorte, que le rapport des distances du second et du quatrième au premier est égal à celui des distances des deux mêmes points au troisième ; alors ces deux points sont dits *conjugués*, c'est-à-dire que leur existence est *simultanée* ou que l'un étant donné l'autre s'en déduit immédiatement.

Ainsi les points B et D seront conjugués, si l'on a la proportion que

A B C D voici : BA:DA::BC:DC; laquelle revient à celle-ci, d'où nous partirons :

$$BA:BC::AD:DC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

La proportion (1) nous montre également que les points B et D divisent la droite AC et son prolongement en quatre *segments* proportionnels.

Le point B étant connu, le point D se déterminera par (1), laquelle peut se mettre sous la forme

$$BA-BC:BC::AD-DC:DC$$
$$\text{ou}\quad (BA-BC)\times CD=BC\times AC.$$

Donc, *tout point* B, *marqué sur une droite* AC, *a pour conjugué un point unique* D.

La discussion de la valeur de CD fera reconnaître que suivant AB> ou <BC, le point D sera au-delà de C ou au-delà de A, et que pour AB=BC, la distance CD devenant infinie, *le conjugué du milieu d'une droite n'existe pas.* Réciproquement, lorsque le conjugué d'un point n'existe pas, c'est que ce point est au milieu de la droite.

Remarque. La proportion (1) donne

$$CD:AD::BC:AB.$$

Donc, les points A et C sont aussi *conjugués* par rapport à la droite BD. Alors, ces quatre points sont dits *conjugués deux à deux.*

3. Trois nombres sont en *proportion harmonique*, lorsque le rapport géométrique de deux de ces nombres est égal au rapport des différences de chacun d'eux avec le troisième.

La relation (1) revient à la proportion harmonique suivante

$$AC-AB:AD-AC::AB:AD,$$

laquelle ne renferme plus que les trois quantités AB, AC, AD; pour lors, AC est dite *moyenne harmonique* entre AB et AD, et les deux points conjugués B et D prennent le nom de *points harmoniques* et de plus l'on dit qu'ils divisent *harmoniquement* la droite AC. Il en est de même des points A et C par rapport à la droite BD.

4. Les définitions précédentes étant bien comprises nous disons que *si par le pôle, on mène une transversale rectiligne coupant la courbe en deux points, ces deux points seront conjugués harmoniques par rapport au pôle et au point où la transversale coupe la polaire.*

La disposition des axes coordonnées n'ayant aucune influence sur l'existence des propriétés, nous adopterons la suivante afin de simplifier les calculs.

Nous prendrons le pôle pour origine, le diamètre polaire pour axe des abscisses et une droite parallèle aux cordes conjuguées du diamètre polaire pour ligne des ordonnées, et les équations de la courbe, du point et de la polaire seront alors

$$Ay^2+Cx^2+2Ex+F=0\,.\;.\;.\;.\;.\;(\Phi')\,.$$
$$X=0\,,\quad Y=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(6)\,.$$
$$Ex=-F\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\pi''')\,.$$

Menons par le pôle C (fig. 2), une transversale quelconque BCAD, et soit pour sa représentation analytique

$$y=mx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

(m est sa direction, laquelle, quoique indéterminée doit être fixée de telle sorte que cette droite coupe la courbe).

Les équations (1) et (ϕ') considérées simultanément nous donnant, pour les points communs à ces deux lieux, l'équation commune

$$(Am^2+C)x^2+2Ex+F=0 \;.\;.\;.\; (2).$$

Nous en obtenons en ayant égard à (1)

$$\left.\begin{matrix} x'=u \\ y'=mu \end{matrix}\right\} \;.\;.\;.\; (3)$$

$$\left.\begin{matrix} x''=u' \\ y''=mu' \end{matrix}\right\} \;.\;.\;.\; (4)$$

De même, les équations (1) et (π''') donnent pour le point d'intersection de la transversale avec la polaire

$$Ex'''=-F,\; Ey'''=-mF \;.\;.\;.\; (5)$$

Or, le théorème sera évidemment démontré si nous vérifions la proportion

$$BC^2:AC^2::BD^2:AD^2, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (6)$$

qui n'est qu'une conséquence de la suivante :

$$BC:AC::BD:AD, \;.\;.\;.\;.\;.\; (H)$$

laquelle exprime la propriété caractéristique des points B et A, supposés *conjugués harmoniques* des points C et D.

A cet effet, nommons β l'angle des axes et nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
BC^2&=x''^2+y''^2+2x''y''\cos\beta,\\
AC^2&=x'^2+y'^2+2x'y'\cos\beta,\\
BD^2&=(x''-x''')^2+(y''-y''')^2+2(x''-x''')(y''-y''')\cos\beta,\\
AD^2&=(x'-x''')^2+(y'-y''')^2+2(x'-x''')(y'-y''')\cos\beta;
\end{aligned}$$

expressions qui deviennent, après la substitution des valeurs (3), (4) et (5),

$$\begin{aligned}
BC^2&=u'^2(1+m^2+2m\cos\beta),\\
AC^2&=u^2(1+m^2+2m\cos\beta),\\
BD^2&=\left(u'+\frac{F}{E}\right)^2(1+m^2+2m\cos\beta),\\
AD^2&=\left(u+\frac{F}{E}\right)^2(1+m^2+2m\cos\beta).
\end{aligned}$$

Donc, à cause du facteur commun $1+m^2+2m\cos\beta$, la proportion 6) devient

$$u'^2:u^2::\left(u'+\frac{F}{E}\right)^2:\left(u+\frac{F}{E}\right)^2.$$

Maintenant, formons le produit des extrêmes et celui des moyens, nous trouvons

$$2\frac{Fu'}{E}uu'+\frac{F^2}{E^2}u'^2=2\frac{Fu}{E}uu'+\frac{F^2}{E^2}u^2$$

relation que nous pouvons mettre sous la forme

$$2\frac{F}{E}uu'(u'-u)=-\frac{F^2}{E^2}(u'^2-u^2)$$

divisant par $u'-u$

$$2\frac{F}{E}uu'=-\frac{F^2}{E^2}(u'+u). \quad (7)$$

Or, l'équation (2) nous donnent, d'après les propriétés communes aux équations du second degré,

$$uu'=\frac{F}{Am^2+C},\quad u'+u=-\frac{2E}{Am^2+C}.$$

Ces relations substituées dans celle (7) nous conduisent à l'identité

$$\frac{2F^2}{E(Am^2+C)}=\frac{2F^2}{E(Am^2+C)}.$$

Donc, *si par le pôle d'une courbe du second degré, on mène une transversale rectiligne coupant la courbe en deux points, ces deux points sont conjugués harmoniques par rapport au pôle et au point où la transversale coupe la polaire.*

Remarque I. Les courbes à centre coupant en deux parties égales les transversales passant par ce point, nous en concluerons conformément à ce que nous avons dit au N° 2 de cette note que *le pôle situé au centre, ne pourra avoir de point conjugué assignable* et que par conséquent *sa polaire ne le sera pas non plus.*

Dans notre mémoire, nous avions omis de considérer cette position du pôle, position d'autant plus remarquable que la polaire n'existe pas et que l'enveloppe des tangentes, menées aux extrémités de toutes les sécantes passant par ce point, est la courbe elle-même.

Remarque II. Nous savons que la parabole, seule courbe du second degré qui soit dépourvue du centre, a tous ses diamètres parallèles entre eux et à l'axe; donc, si par le pôle nous menons un diamètre, son point de rencontre avec la courbe sera un des points harmoniques; mais

comme l'autre point est inassignable, nous en concluerons que le point harmonique assignable est situé au milieu de la distance du pôle à la polaire, distance mesurée sur la droite passant par le point harmonique.

Note II.

I. *L'intersection des deux tangentes menées aux extrémités d'une corde, coupant une courbe du second degré, est le pôle de cette corde.*

C'est une conséquence immédiate de ce que, si nous prenons ce point d'intersection pour pôle la polaire sera (N° 24) la droite joignant les points de contact des deux tangentes menées à la courbe par ce point.

Remarque. Le pôle de cette corde sera inassignable lorsqu'elle passera par le centre de la courbe.

II. *Le pôle de toute droite menée par un point est sur la polaire de ce point; et réciproquement.*

1°. Du point donné supposé extérieur à la courbe menons à cette dernière une couple de tangentes, la corde de contact devra renfermer le pôle de la droite; or, cette droite n'étant autre chose que la polaire de ce point (I), donc......

2°. Si le point donné est intérieur à la courbe, remarquons que l'intersection des tangentes menées aux points communs à la courbe et à la droite donnée étant (N° 25) le pôle de celle-ci, est un point de la polaire du point donné, donc......

Le cas du point situé sur la courbe rentre dans le premier.

Remarque. Le point situé au centre de la courbe n'aura pas de polaire assignable.

III. *Dans une courbe du second degré, l'intersection de deux polaires quelconques, est le pôle de la droite qui joint les pôles des deux polaires.*

En effet, ce point d'intersection appartenant aux deux polaires est à la fois (II) le pôle d'une droite passant par les pôles des deux polaires, donc.....

Remarque. Lorsqu'une des polaires passe par le centre, la polaire cherchée est déterminée par le pôle assignable et les tangentes aux points d'intersection de la courbe avec la polaire centrale, (en appelant ainsi celle qui passe par le centre).

IV. Puisqu'une polaire ne peut avoir qu'un seul pôle, et un pôle qu'une seule polaire, on voit (III) que *si tant de pôles qu'on voudra sont en ligne droite, leurs polaires se couperont en un seul point, pôle de cette droite.* Réciproquement, *si plusieurs droites se coupent en un seul point, leurs pôles seront en ligne droite*, polaire de ce point (II).

NOTE III.

D'un point A *pris dans le plan d'une ligne du second degré , on mène deux sécantes quelconques* ACD , ABE ; *on joint deux à deux les points de rencontre avec la courbe , on demande le lieu des points d'intersection de ces droites entres elles* (fig. 3).

Nous prendrons le point A pour origine des coordonnées , l'une des sécantes variables AE pour axe des abscisses et l'autre AD pour celui des ordonnées.

Ceci posé , représentons notre courbe par

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0 \ldots \quad (\phi).$$

A , B , C , D , E , F sont évidemment des quantités variables avec la position des sécantes.

Posant $AB=x'$, $AE=x^{\text{iv}}$, $AC=y''$, et $AD=y'''$, les droites CB et DE auront pour équations

$$\frac{y}{y''}+\frac{x}{x'}=1 \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{y}{y'''}+\frac{x}{x^{\text{iv}}}=1 \ldots\ldots \quad (2)$$

De plus , remarquant que y'', y''' et x', x^{iv} ne sont autre chose que les racines de l'équation (ϕ) lorsqu'on y a posé préliminairement $x=0$, et $y=0$, nous obtenons

$$Ay^2+2Dy+F=0$$
$$Cx^2+2Ex+F=0.$$

desquelles relations en vertu de propriétés bien connues

$$A(y''+y''')=-2D,\ Ay''y''=F \ldots\ldots \quad (3)$$
$$C(x'+x^{\text{iv}})=-2E,\ Cx'x^{\text{iv}}=F \ldots\ldots \quad (4).$$

Or, l'élimination des quantités variables x',x^{iv}, y'' et y''' entre (1), (2) , (3) et (4) , nous conduisant à l'équation du lieu cherché , effectuons cette élimination.

A cet effet , faisant la somme de (1) et (2) nous obtenons

$$y\frac{y''+y'''}{y''y'''}+x\frac{x'+x^{\text{iv}}}{x'x^{\text{iv}}}=2\,; \qquad (\varsigma)$$

et en ayant égard aux relations (3) et (4) , nous avons pour l'équation du lieu cherché

$$Dy+Ex+F=0 \ldots\ldots \quad (\pi).$$

Donc , *ce lieu est une ligne droite.*



2. Prouvons maintenant que cette droite (π) n'est autre que celle passant par les points de contact des tangentes à la courbe menées par le point A.

A cet effet, rappelons-nous que nous avons trouvé (N° 1 de notre mémoire) pour l'équation d'une tangente à une courbe quelconque du second degré :

$$Ayy'+B(xy'+yx')+Cxx'+D(y+y')+E(x+x')+F=0.$$

Or, cette équation est celle de la ligne de contact, si l'on y regarde x',y' comme variables et x,y constants ; et en y posant $x=0$, $y=0$, pour indiquer que les tangentes passent pour l'origine, nous obtenons, en effaçant les accens,

$$Dy+Ex+F=0 ;$$

laquelle est précisément l'équation (π). C. Q. F. P.

3. Le point N appartient aussi au lieu (π), car les droites CE et BD ayant pour équations

$$\frac{y}{y'''}+\frac{x}{x'}=1 \quad \text{et} \quad \frac{y}{y''}+\frac{x}{x^{\text{iv}}}=1,$$

leur somme est

$$y\frac{y''+y'''}{y''y'''}+x\frac{x'+x^{\text{iv}}}{x'x^{\text{iv}}}=2 ;$$

relation qui n'est autre que celle (5).

4. Il résulte du N°. 2 de cette note, que le point A est le pôle de la droite MN et que par conséquent, le théorème de la polaire n'est qu'un cas particulier de celui-ci :

Si par un point donné sur le plan d'une courbe du second degré, on mène des couples de transversales à cette courbe et qu'on joigne deux à deux les points de rencontre de ces couples de transversales avec la courbe ; le lieu des points d'intersection de ces droites est une ligne droite.

5. En considérant le quadrilatère inscrit BCDE, nous voyons que le point A, intersection de deux côtés opposés prolongés, est le pôle de la droite passant par l'intersection des deux diagonales de ce quadrilatère et par le point de rencontre de ses deux autres côtés prolongés. Il en est de même du point M par rapport à la droite AN. Enfin, le point M est le pôle de la droite AM en vertu de la propriété III de la note II.

Donc, *dans tout quadrilatère inscrit dans une courbe du second degré, les intersections des diagonales et des côtés opposés prolongés, forment un triangle dont chaque sommet est le pôle du côté opposé.*

6. *Il résulte de là un moyen très simple de mener une tangente à une courbe du second degré au moyen de la règle seulement.*

Du point donné, hors la courbe, on mène deux sécantes quelconques ;

par leurs points d'intersection avec la courbe on mène quatre droites qui en se coupant déterminent deux points, la droite qui joint ces deux points coupera la courbe aux points de contact.

Remarque I. Si par un pôle, on mène deux transversales quelconques et qu'on joigne deux à deux les quatre points d'intersection avec la courbe ; ces quatre droites donneront deux points de la polaire du pôle donné.

Remarque II. Le pôle d'une polaire se construira en cherchant par la remarque précédente les polaires de deux de ses points et l'intersection de ces deux droites sera le pôle demandé (III note II).

III. — *Notice sur quelques espèces de* Pics *du Brésil*,

Par M. ALFRED MALHERBE.

Pendant le séjour que j'ai fait à Vienne en 1843, j'ai obtenu, grâce à l'obligeance de M. Joseph Natterer, un des conservateurs du Museum impérial et royal d'histoire naturelle auquel j'étais recommandé, la communication de tous les exemplaires du genre *Picus* qu'avait rapportés de l'Amérique méridionale et notamment du Brésil M. Jean Natterer, son frère, dont le monde savant déplore la perte récente.

Ce dernier naturaliste n'avait pas encore eu le temps de classer et de publier toutes ses richesses zoologiques, et ce travail commencé par M. Wagner, de Munich, pour les mammifères, a été interrompu par le fatal évènement dont je viens de parler.

J'ai été assez heureux pour obtenir également en communication des notes manuscrites rédigées par M. Jean Natterer, pendant son voyage au Brésil. Ces notes indiquaient notamment la couleur de l'iris des espèces qui venaient à être tuées; elles m'ont été d'autant plus précieuses que très souvent les naturalistes voyageurs négligent cette indication et qu'il arrive par suite que les ouvrages d'histoire naturelle n'énoncent que fort rarement la couleur des yeux chez les oiseaux; aussi les préparateurs, faute de documents, placent-ils les yeux au hasard en cherchant seulement à *les assortir* à la couleur du plumage.

Mes investigations ont été faites concurremment avec M. J. Natterer, qui, à mes pressantes sollicitations a bien voulu nommer, d'accord avec moi, quelques-unes des espèces ci-après que je crois nouvelles, n'en ayant trouvé la description dans aucun auteur anglais, allemand ou français.

1. PICUS NATTERERI ou CHRYSOPTILUS (*Swains.*) NATTERERI.

Pic Natterer.

J'ai voulu rendre hommage à la mémoire de Jean Natterer en lui dédiant cette espèce rapportée par lui des forêts du Brésil.

Ce Pic a quelques rapports avec le *Picus cayennensis* dont il diffère néanmoins d'une manière très sensible. Ainsi le Pic Natterer a 25c, 6 à 7mill. de long, tandis que le Pic de Cayenne n'a que 21c, 6 à 7mill..

Le *mâle* a le front et le vertex noirs, le sinciput et la nuque rouge vif, les plumes de ces dernières parties étant beaucoup plus longues que les autres ; à partir du bec une large moustache rouge vif ; région ophthalmique et tout le côté du cou d'un blanc lavé de jaunâtre pâle ; menton, gorge et devant du cou d'un blanc sale avec de fines stries longitudinales d'un brun foncé, tandis que la gorge du *P. cayennensis* est d'un noir profond grivelé de blanc. Toutes les parties inférieures d'un jaune verdâtre, lavé de cendré brun, et chaque plume marquée vers son extrémité d'une tache ou grattelette noire lanceolée, trois fois plus grande que les taches observées chez le *Cayennensis* ; ces taches sont plus allongées et beaucoup moins étendues sur l'épigastre et le ventre que sur la poitrine, les flancs et les couvertures inférieures de la queue. Toutes les parties supérieures sont d'un brun olivatre lavé de jaunatre avec des bandes lancéolées noires, trois fois plus larges que chez le *P. cayennensis*. Les ailes sont rayées transversalement de roux jaunatre clair et de brun noiratre, l'extrémité de chaque penne étant d'un blanc roussâtre.

La queue est rayée de même et, à l'exception des deux pennes extérieures de chaque côté qui sont de la couleur des ailes, toutes les pennes sont noires dans plus de leur moitié. Les côtes des pennes des ailes et des deux premières pennes de la queue sont d'un jaune vif.

Le dessous de l'aile est d'un blanc jaunâtre, les remiges sont rayées et terminées par du brun pâle. Bec brun, pieds brun cendré ; iris d'un brun roux foncé.

La *femelle* diffère du mâle par l'absence de la moustache rouge qui est remplacée par une moustache noire grivelée de blanc

cendré. Elle a le rouge moins étendu sur la tête, et les couleurs généralement moins vives.

Longueur totale	25cent 6 à 7mill.
Longueur du bec nu	2c.
Id. à partir de la base du crâne	2c—8m.
Longueur de la queue	8c—5m.
Id. de l'aile	12c—4mill.
Id. du tarse	2c.

(Du Brésil.)

PICUS OLIVINUS. (*Jos. Natt.* et *Malh.*)

Le Pic olivâtre.

Cette espèce du Brésil est de la taille du *P. adspersus.* Front et sommet de la tête d'un brun lavé de cendré et d'olivâtre; gorge d'un cendré blanchâtre. Toutes les parties inférieures d'un brun olivâtre rayé transversalement de cendré blanchâtre, excepté la queue qui n'a aucune raie; dos, ailes et croupion d'un olivâtre, jaunâtre sur le dos. Sur l'aile dix ou douze taches triangulaires rousses, placées sur deux rangées; chez le mâle tout l'occiput est rouge, tandis que la tête est brun olivâtre chez la femelle. Région temporale brun olivâtre, rayée de cendré blanchâtre chez la femelle. Deux ou trois grandes taches blanches arrondies, sur le rebord intérieur des pennes des ailes, qui sont tachées de blanc en dessous. Queue brune, mêlée de roux au dessus.

Iris brun foncé.

Longueur totale	15c—7mill.
Id. du bec seul à partir du front	2c—1m.
Id. de la queue	4c—5m.
Id. de l'aile	9c.
Id. du tarse	2c—1m.

(Du Brésil.)

3°. PICUS MURINUS. (*Jos. Natt.* et *Malh.*)

Le Pic murin.

Cette espèce diffère du *P. olivinus* dont elle a la taille et l'aspect, 1°. en ce que le rouge chez le *mâle* commence à partir du front et

s'étend sur le vertex et la moitié du sinciput, sans atteindre la nuque, tandis que chez le *P. olivinus* l'inverse existe, c'est-à-dire le rouge n'existe qu'à la nuque. 2°. En ce que les parties inférieures sont d'un brun pâle, rayé de gris blanchâtre, au lieu d'être olivâtres. La couleur olivâtre du dos, du croupion et des ailes est aussi beaucoup moins vive et il n'existe presque pas de jaune sur ces parties.

La *femelle* ne diffère presque pas de celle de l'*olivinus*. Elle possède quelques petites mouchetures d'un blanc jaunâtre sur le brun olivâtre de la tête.

Iris brun foncé.

Longueur totale	15^c—7^m.
Id. du bec seul à partir du front	2^c—1^m.
Id. de la queue	4^c—5^m.
Id. de l'aile	9^c—3^m.
Id. du tarse	1^c—8^m $^1/_2$.

(*Du Brésil.*)

4°. PICUS LEUCOLAEMUS. (*Jos. Natt.* et *Malh.*)

Le Pic à gorge blanche.

Ce Pic ressemble beaucoup au *Picus icterocephalus* (Wagler. 52), et il en diffère en ce qu'il a la gorge blanche tandis qu'elle est jaune chez l'*icterocephalus*.

La moustache rouge du mâle est plus large que chez le *P. icterocephalus*. Il existe moins de blanc sur les parties inférieures du *leucolaemus* et le brun olivâtre est plus foncé, les taches blanches sont plus rares et moins grandes.

Le *mâle* diffère de la femelle, parce qu'il a toute la tête et la moustache rouges tandis que la femelle n'a que l'occiput de cette couleur, la moustache et la tête étant d'un vert olivâtre lavé de jaune. Iris cendré brun.

Longueur totale	23^c.
Id. du bec seul à partir du front	2^c—3.
Id. de la queue	5^c—6.
Id. de l'aile	12^c.
Id. du tarse	1^c—8^m $^1/_2$.

(*Du Brésil.*)

5°. **PICUS GRAMMICUS.** (*Jos. Natt.* et *Malh.*)

Le Pic barriolé.

Ce Pic a quelque rapport avec le *Picus brachyurus*, mais il est plus grand.

Le *mâle* a toute la tête et la huppe d'un roux foncé, la moustache rouge, toutes les parties supérieures rousses, chaque plume ayant des raies transversales brunes. Ailes brun pâle, avec une partie du rebord interne d'un marron pâle et quelques taches rousses sur le rebord externe; croupion d'un roux verdâtre sans tâches : parties inférieures rousses, chaque plume ayant un demi cercle brun foncé, verdâtre au milieu ; cuisses d'un jaune verdâtre ; flancs verdâtres ; dessous de l'aile d'un brun verdâtre ; ventre d'un roux vif sans taches noires ; queue brun noirâtre avec la base rousse.

La *femelle* diffère par l'absence de la moustache rouge.

N. B. Un sujet que je crois un très vieux mâle, avait le croupion d'un jaune lavé de roux, les flancs et le dessous des ailes d'un jaune pâle ; les cercles noirs des parties inférieures n'avaient pas de teinte verdâtre.

Iris carmin foncé.

Longueur totale	27^{c}—8^{m}.
Id. du bec seul à partir du front	2^{c}—6^{m}.
Id. de la queue	7^{c}.
Id. de l'aile	12^{c}.
Id. du tarse	2^{c}—1^{m}.

(*Du Brésil.*)

6°. **PICUS MULTIFASCIATUS.** (*Jos. Natt.* et *Malh.*)

Le Pic à mille raies.

Ce Pic est plus petit que le *P. grammicus;* la tête, la gorge et le cou sont roux avec de fines raies longitudinales noires. Parties inférieures rousses, chaque plume ayant trois raies transversales noires; parties supérieures d'un roux plus vif, avec des bandes noires transversales sur le dos, les ailes, les couvertures supérieures de la queue et le croupion; les plumes de cette dernière partie à base verdâtre ; pennes des ailes terminées de brun uniforme; queue à extrémité noire, rayée de roux en dessus, et d'un brun sans taches en dessous.

Le *mâle* a une large moustache rouge qui est remplacée chez la femelle par une teinte rousse avec des raies longitudinales noires. Le bec est d'une teinte cornée verdâtre à la partie inférieure et à pointe noire. Dessous des ailes d'un bleu verdâtre ou jaune verdâtre suivant l'âge.

Iris carmin foncé.

Longueur totale	25^{c}.
Id. du bec seul à partir du front	$2^{c}—6^{m}$.
Id. de la queue	$6^{c}—4^{m}$.
Id. de l'aile	$11^{c}—3$.
Id. du tarse	$1^{c}—8^{m}\ ^{1}/_{2}$.

(*Du Brésil.*)

IV. — *Recherches théoriques et expérimentales sur les Machines destinées à l'aérage des Mines.*

Par L. TRASENSTER, sous-ingénieur des Mines.

I. Les fréquents désastres occasionnés dans les houillères, par l'inflammation du grisou, ont appelé depuis longtemps l'attention des ingénieurs et des savants sur les moyens de soustraire la classe ouvrière des mines à ce terrible fléau. Des recherches nombreuses ont été entreprises ; et dans ces derniers temps, secondées par le Gouvernement Belge, elles ont donné naissance à plusieurs écrits et à des découvertes utiles. M. Mueseler, par les modifications ingénieuses qu'il a fait subir à la lampe de Davy, a rendu infiniment moins redoutables les dangers que présentait l'éclairage des mines : mais, dans le travail des houillères, quelques circonstances peuvent encore déterminer l'explosion des gaz combustibles.

Non seulement les lampes sont exposées à des accidents, qui leur ôtent leur efficacité comme appareils de sûreté ; mais il existe une cause de danger permanente et beaucoup plus sérieuse : c'est le tirage à la poudre, dont l'emploi est indispensable dans beaucoup d'occasions.

L'ouvrier est donc exposé aux plus grands périls, chaque fois que l'air se trouve vicié par la présence de gaz inflammables. Le seul préservatif infaillible, c'est d'empêcher cette condition dangereuse de se réaliser, en déterminant un appel d'air suffisant pour balayer les ateliers d'exploitation, et surtout les parties de la mine où l'on doit recourir à l'usage de la poudre.

Si l'on consulte la statistique des accidents survenus dans les houillères, l'on constatera que les explosions de grisou, ont eu lieu, à très peu d'exceptions près, du commencement d'avril au mois de septembre ; c'est-à-dire, lorsque l'état de l'atmosphère est peu favorable à la ventilation ; et la plupart, au printemps, lorsque les premières chaleurs viennent changer les conditions de sécurité des ouvriers, sans qu'ils y soient préparés. Les dernières catastrophes arrivées dans la province de Liége, à Ougrée et au Horloz, ont eu probablement pour cause première, l'insuffisance momentanée de la ventilation qui a permis au grisou de s'accumuler dans les travaux, et de s'enflammer par la déflagration de la poudre.

2. L'emploi de moyens propres à assurer d'une manière permanente le renouvellement de l'air dans les mines à grisou qui peuvent se trouver dans de mauvaises conditions, deviendra un complément nécessaire des mesures de prudence que prescrit l'Administration.

Toutefois les dépenses de premier établissement et d'entretien, qu'avaient occasionnés les machines pneumatiques connues, ne permettaient pas d'en conseiller l'emploi sans de pressants motifs.

Dans la plupart des exploitations déjà anciennes, l'étendue des travaux et la faible section des puits obligent à employer une force motrice considérable pour produire une ventilation convenable. La recherche des moyens les plus propres à atteindre ce but, a été dans ces derniers temps l'objet de plusieurs écrits, parmi lesquels on doit signaler, et par son importance et par son étendue, le Traité de l'aérage, de M. Combes, rédigé par les ordres de l'administration française et inséré dans les tomes XV et XVII de la 3e série des Annales des Mines.

En appelant l'analyse mathématique à la solution des divers problèmes que soulève la matière ; en ouvrant le champ à la discussion par la manière dont plusieurs d'entre eux sont posés ; M. Combes a rendu un véritable service à l'art des Mines : mais une confiance trop absolue dans les résultats du calcul appliqué à des phénomènes aussi complexes que ceux que présentent les mouvements de l'air et un examen trop rapide de certaines questions l'ont conduit sur quelques points à des solutions erronées.

Nulle part les assertions de cet ingénieur n'ont eu autant d'influence qu'en Belgique ; et la condamnation absolue du système « des Machines à Pistons, comme radicalement vicieux pour le » genre d'effet que doivent produire les appareils destinés à l'aé- » rage » qu'il avait formulée § 33 de son traité, a donné naissance à un grand nombre de machines fondées sur d'autres principes.

3. Depuis la publication de ce traité, une seule machine à soupapes s'est établie en Belgique, c'est celle à Cloches Plongeantes, de la houillère de Marihaye, à Seraing, construite d'après les idées émises par M. de Vaux, dans son cours d'exploitation.

Les études et les expériences que j'ai faites sur cette machine et sur celle de l'Espérance ; la comparaison des effets que j'ai observés et de ceux fournis par des machines de systèmes différents m'ayant conduit à des résultats entièrement opposés aux conclusions du savant professeur de l'École des Mines de Paris, je pense que la

publication de ces résultats ne sera pas sans intérêt pour les personnes qui s'occupent de ces matières, et pour les exploitants qui sont dans la nécessité d'employer des moteurs pour l'aérage des mines.

Je ferai voir que l'on peut facilement faire disparaître les défectuosités qui se rencontrent dans les machines à soupapes actuellement en activité, et qui ont motivé l'opinion défavorable que l'on a conçue de leur emploi.

Je démontrerai que dans les conditions ordinaires, où l'on doit recourir à l'emploi des machines pour la ventilation, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de déplacer de grands volumes d'air sous des dépressions marquées par des colonnes d'eau qui dépassent 15 à 20 millimètres :

Les machines à soupapes, bien construites, ont une supériorité incontestable sur les ventilateurs ;

Que parmi les divers systèmes de machines à soupapes, celui à cloches plongeantes est le plus avantageux ;

Enfin j'exposerai les considérations qui me font penser que, lorsqu'il faut extraire de l'air sous de faibles dépressions, l'on pourrait employer avec succès une forme de ventilateur différente de celles actuellement en usage.

4. Pour apprécier avec exactitude la nature et l'importance relative des résistances nuisibles qui se rencontrent dans les machines à soupapes, j'ai soumis celles-ci à des expériences variées, propres à déterminer l'influence des divers organes qui les composent, sur l'effet réalisé.

Le concours qu'a bien voulu me prêter, pour toutes ces expériences, M. Geoffroy, élève ingénieur des Mines, et l'obligeance avec laquelle MM. Behr, directeur-gérant de la Société de l'Espérance, et Plumat, directeur de la mine de Marihaye, ont fait mettre à ma disposition les machines de ces établissements, m'ont permis d'apporter dans mes opérations toute l'exactitude nécessaire.

Manomètre adopté pour les expériences.

5. Au premier abord, il se présentait une difficulté sérieuse qui rend fort incertaine les expériences faites antérieurement sur les machines d'aérage à mouvement alternatif ; c'est la détermination de la hauteur moyenne, mesurant la différence de la force élastique de l'air extérieur et de l'air qui après avoir circulé dans la mine, arrive à la machine, soit avant qu'il y pénètre, soit dans la machine même. On remarque en effet que cette hauteur varie continuellement : sous les pistons il y a alternativement, compression et

dépression par intervalles réguliers, et l'on peut avec un manomètre ordinaire mesurer assez approximativement chacun de ces deux effets ; mais la difficulté devient beaucoup plus grande, lorsqu'il faut connaître le degré moyen de dilatation dans les conduits qui amènent l'air à la machine. Alors pour chaque course complète du piston il y a ordinairement deux dépressions et deux compressions ; ces dernières ont lieu au moment où le piston change de mouvement, immédiatement après la fermeture des clapets et ne durent qu'un instant.

Ces changements brusques dans la force élastique de l'air, occasionnent dans la colonne liquide une agitation continuelle, et des surélévations dues à la force vive qu'impriment au liquide les variations rapides de pressions et la descente des colonnes soulevées.

M. de Vaux ayant fait l'observation que l'amplitude des oscillations diminuait rapidement avec le diamètre du tube manométrique ; nous eûmes l'idée de produire dans ce tube un rétrécissement artificiel, variable selon les circonstances, en introduisant dans l'une des branches un bouchon, qui laissât au liquide une ouvertude suffisante pour atteindre en peu de temps son niveau.

De cette manière, j'ai pu observer avec beaucoup plus d'exactitude qu'à l'aide des manomètres ordinaires, les dépressions moyennes produites par la machine dans les galeries d'appel. Les oscillations sont alors peu étendues, et les compressions instantanées qui se manifestent immédiatement après la fermeture des clapets, ne sont pas assez prolongées pour produire une ascension du liquide en sens inverse. Leur effet se borne à provoquer dans la colonne un abaissement de niveau qui mesure leur influence dans la détermination de la hauteur moyenne.

Nous avions cru d'abord, pouvoir arriver au même résultat à l'aide d'un robinet, destiné à intercepter en partie la communication du manomètre avec l'air dont on voulait mesurer la tension ; mais ce moyen était inexact, parce que le choc qui a lieu après la fermeture des clapets, comprimait l'air contenu entre le robinet et l'eau du manomètre de manière à rendre la dépression indiquée, plus faible que la dépression réelle.

Lorsqu'on détermine la force élastique de l'air sous le piston avec un manomètre à étranglement, il faut avoir soin, si les excursions de la colonne liquide sont grandes, d'observer isolément l'un des effets de la marche du piston, la dépression ou la compression, en fermant le manomètre à l'aide du doigt pendant que l'autre effet se produit. Autrement il pourrait arriver que la résistance au mouve-

ment de l'eau fût trop grande pour lui permettre de parcourir l'étendue nécessaire dans l'intervalle des oscillations de la machine, et que par suite les indications du manomètre fussent trop faibles, puisque le liquide devrait redescendre avant qu'il eût atteint la hauteur maximum.

L'emploi d'un manomètre étranglé, dans cette circonstance, permet d'observer la hauteur moyenne avec plus de facilité parce que les petites oscillations sont insensibles.

Calcul de l'effet des Machines.

6. La méthode généralement employée pour calculer l'effet utile des machines d'aérage, consiste à déterminer, tant bien que mal, la dépression produite dans les galeries d'appel et le volume d'air aspiré; puis à comparer l'effet ainsi obtenu à la force de la machine, estimée d'après la tension de la vapeur dans la chaudière, avec toute l'incertitude que comporte l'emploi de coefficients de réduction : cette méthode qui rend l'appareil solidaire de l'habileté du mécanicien, n'est susceptible d'aucune précision, et ne peut conduire à des résultats comparatifs dignes de confiance. Pour bien juger d'un appareil de ventilation, il faut déterminer la force qui lui est directement appliquée indépendamment du système de la machine; ensuite voir quelle portion de cette force se trouve utilisée, en recherchant la nature des diverses résistances auxquelles donne inévitablement lieu le mouvement de l'air dans l'appareil employé. Des considérations mécaniques peuvent alors permettre de comparer les avantages et les inconvénients des divers moyens qui servent à transmettre l'action du moteur.

Dans le système des machines à cloches, on peut calculer avec une approximation très grande la force directement appliquée. On observe la dépression moyenne sous l'une des cloches, la compression simultanée qui a lieu sous l'autre, la somme de ces deux résistances représente l'effort total employé pour mouvoir les cloches.

En le comparant à la hauteur motrice nécessaire pour faire circuler l'air dans la mine, on a le rapport de l'effet utile à la force appliquée, si aucune perte d'air n'a lieu par le jeu de l'appareil.

Le volume d'air aspiré étant toujours moindre que le volume théorique, il faut multiplier le chiffre ainsi obtenu par un coefficient de réduction, que nous prendrons égal à 0,9 ce qui suppose une perte d'air égale au dixième du volume théorique. La perte doit être moins élevée pour les machines bien construites, ainsi que nous l'établirons par la suite.

Dans les machines à pistons, il faut ajouter à la hauteur qui représente l'effort nécessaire pour produire le mouvement de l'air, une pression équivalente au frottement des pistons.

Jaugeage des courants d'air.

7. Les modes de jaugeage employés dans les mines sont au nombre de trois :

1°. l'emploi de la fumée développée par un corps très combustible comme la poudre. Ce moyen donne des résultats très satisfaisants dans les galeries muraillées d'une section uniforme, mais dans la plupart des cas, il présente la difficulté de déterminer la section moyenne d'une galerie irrégulière d'une certaine longueur.

La vitesse moyenne observée n'est aussi qu'approximative parce que généralement l'air se meut suivant l'axe de la conduite, plus rapidement que le long des parois. Mais le plus grand inconvénient que présente ce moyen, c'est que dans les mines à grisou il ne peut être employé pour jauger les courants d'air qui ont déjà circulé dans les travaux.

2°. L'anémomètre de M. Combes.

Cet instrument offre l'avantage de n'exiger qu'un espace limité pour l'expérience, et ses indications sont d'une exactitude suffisante lorsque la vitesse de l'air est régulière. Toutefois la vitesse moyenne donnée par l'observation n'est aussi qu'approximative, parce que les vitesses, dans les divers points d'une section, sont très variables, et ne sont soumises à aucune loi déterminée. L'instrument est en outre exposé dans les mines, à des causes fréquentes de déformation qui le mettent hors d'usage, et lorsque la vitesse de l'air est très variable, les résultats qu'il fournit sont tout-à-fait inexacts.

J'avais voulu déterminer les pertes d'air qui ont lieu dans la machine de l'Espérance[1], en plaçant l'anémomètre dans la galerie qui établit la communication des puits d'aérage avec les cuves. Deux expériences concordantes, faites dans diverses sections m'ont donné $10^{m3}88$ pour le volume aspiré, tandis que le volume théorique n'était que de $8^{m3}73$. Cette différence doit être attribuée à ce que dans les intervalles des coups de piston la vitesse de l'air est nulle, tandis que l'anémomètre continue à tourner très rapidement, et donne ainsi des indications trop élevées.

3°. Le troisième moyen consiste à déterminer la vitesse de l'air dans une section rétrécie par la différence des pressions qui ont

lieu de chaque côté de la section. Ce procédé, d'une exécution facile, est susceptible d'une très grande précision, par l'emploi du manomètre multiplicateur, inventé par M. de Vaux, et à l'aide duquel on peut observer des hauteurs motrices représentées par de petites fractions de millimètres d'eau. Mais plus encore que le précédent, ce moyen exige que pendant la durée de l'observation, la vitesse ne varie que dans des limites très restreintes.

8. On voit qu'aucun de ces procédés ne permet de déterminer avec précision, le volume d'air aspiré par les machines à mouvement alternatif, immédiatement avant son entrée dans les cuves.

Si l'on consulte les diverses expériences faites sur ces machines, on trouvera que les pertes sont quelquefois inférieures et plus souvent supérieures au dixième du volume théorique.

Mais, si l'on remarque que le jaugeage s'effectue à l'entrée de l'air dans les travaux, et que le volume indiqué doit être augmenté des dégagements de gaz dans les travaux, des fuites d'air qui ont lieu par les tampons des puits et par les communications qui existent entre le bure d'aérage et celui d'extraction, de l'influence de la température de l'air sortant qui est souvent supérieure à celle de l'observation, on admettra que ces expériences ne sont nullement concluantes.

L'examen des diverses causes de perte, prouvera d'ailleurs, que le chiffre de 0,1 doit être rarement atteint.

Machine à piston de l'Espérance à Seraing.

9. Cette machine, figurée planche I, se compose de deux pistons se mouvant dans deux cuves cylindriques en bois de 3^{m}54 de diamètre. Les pistons sont attachés aux extrémités d'un balancier qui reçoit le mouvement d'une machine à vapeur, placée au-dessus de l'une des cuves. Les pistons et les fonds des cuves sont percés, chacun de 20 ouvertures; la course varie, suivant la vitesse de la machine, entre 1^{m}90 et 1^{m}60.

Les travaux sont établis à 447^{m} et à 500^{m} de profondeur.

Expériences.

10. Le 11 février 1843, la machine donnant 51 coups en 4', un manomètre ordinaire a été placé successivement sur les tampons qui bouchent les deux puits d'aérage.

Pendant une course double du piston, il indiquait deux dépressions et deux compressions ;

Mais, ainsi que cela se remarque dans presque toutes les machines à mouvement alternatif, l'une des dépressions était plus prononcée que l'autre, ce que j'attribue à la différence de vitesse des pistons.

Sur le tampon du puits de l'Ouest, la dépression atteignait en très peu de temps 0^{m}08, diminuait jusqu'à 0,05 où elle restait un instant stationnaire, pour être suivie d'une compression très rapide de 0,0675 ; à celle-ci succédait bientôt une dépression de 0,05, qui se réduisait à 0,04 pour s'élever et se maintenir un instant vers 0,045, et être remplacée par une compression de 0,0575.

Sur le tampon du puits de l'Est, l'aspiration était indiquée par une colonne qui s'élevait à 0^m,08 descendait à 0,05 était suivie d'une compression instantanée de 0,08 à laquelle succédait une aspiration de 0,06 descendant régulièrement à 0,03 et suivie d'une nouvelle compression de 0,075.

D'après ces données, j'estime que pendant l'ascension de l'un des pistons la dépression moyenne était de 0^m,055 et pendant l'ascension de l'autre piston de 0^m,045, soit 0^m,05 pour la moyenne générale.

11. Ces expériences ont été reprises le 12 mai 1843, avec un manomètre d'un diamètre très large.

La machine donnait 14,5 coups par 1'. Sur le 1er *tampon*, la dépression atteint en peu de temps 0^m,094, diminue jusqu'à 0,081 où il y a oscillation, suivie d'une compression instantanée de 0,06 ; la colonne liquide indique ensuite une dépression de 0,066 où elle reste stationnaire, puis est refoulée de 0,065.

Sur le second tampon le liquide atteint 0^m,11 redescend à 0,068 remonte à 0,097 en oscillant entre les deux termes, indique ensuite une compression de 0,064, suivie d'une nouvelle aspiration de 0,076, oscille vers 0,068 et est encore refoulé de 0,060.

Les compressions étant toujours instantanées, si l'on prenait pour mesure de la dépression les hauteurs où le liquide parait stationner, celle-ci serait représentée par des colonnes de 0^m,0805 pour l'un des pistons, et de 0^m,067 pour le second ou en moyenne par une colonne d'eau de 0^m,0737.

Le manomètre, appliqué à l'une des cuves a donné les indications suivantes, pour une vitesse de 14 coups par minute.

Pendant l'ascension du piston : la colonne d'eau s'élève très-rapidement à 0^m,157, redescend à 0,13, remonte à 0,17 et oscille autour de 0,13 pendant la plus grande partie de la course du piston, soit en moyenne 0^m,14.

Pendant la descente : la compression qui est d'abord de $0^m,10$, oscille ensuite autour de 0,062 que je considérerai comme moyenne. Il résulterait de ces données, que sans tenir compte des frottements, la force appliquée serait représentée par une colonne de $0^m,202$ d'eau ; l'effet utile par une colonne de $0^m,0737$.

Soit pour le rapport de ces deux quantités $\frac{737}{2020}=0,365$ et

dixième déduit 0,3285.

Ces expériences font voir combien est incertaine, par le moyen des manomètres ordinaires, la détermination du degré moyen de vide qui s'opère dans les galeries d'appel.

La suite nous prouvera que les données fournies par le manomètre appliqué à la cuve, sont aussi trop élevées ; ce qui tient aux agitations de la colonne liquide dans les tubes d'un grand diamètre.

Indépendamment de toute résistance passive, le mouvement de l'air exigerait d'après ces données une force de 23 chevaux, tandis que la force de la machine ne serait que de 22 chevaux environ (1).

12. Le 26 mai, j'ai répété ces expériences pour différentes vitesses de la machine, à l'aide de *manomètres à étranglement* et j'ai obtenu les résultats suivants :

Sur le 2e. tampon. Pour une vitesse de 13,4 coups par minute, la dénivellation s'élevait à $0^m,056$, descendait presque régulièrement jusqu'à 0,043, remontait à 0,046, descendait de nouveau régulièrement à 0,037 pour remonter au point de départ, soit pour l'aspiration moyenne $0^m,0455$.

Une seconde observation a donné pour une vitesse de 1,35 coups au lieu des chiffres précédents respectivement 0,058, 0,046, 0,049 et 0,037 soit en moyenne $0^m,0475$.

Sur le 1er. tampon. Pour la même vitesse ces chiffres ont été respectivement de 0,056, 0,42, 0,049 et 0,035 soit en moyenne $0^m,0455$.

L'ensemble de ces indications donne pour la dépression moyenne $0^m,046$.

---

(1) Pression de la vapeur $2\,^1/_2$ atmosphères.
Diamètre du piston $0^m,38$.
Vitesse $0^m,886$.
Consommation du foyer 120 kilog. par heure.
Ce qui donne une force théorique de 33,66 chevaux ou une force pratique de $33,66\times0,6=22$ chevaux.

Sur le 2e. *tampon*. Le manomètre a donné les indications suivantes pour une vitesse de la machine correspondant à 9,4 coups par 1', et à une course des pistons de 1m63.

La dénivellation s'élève à 0m,018, redescend à 0,007, remonte à 0,0095, descend de nouveau à 0,0054 et remonte au point de départ.

Soit 0m,01 pour la mesure de la dépression moyenne.

Sur le 1er. *tampon*. Le manomètre donne la même dépression.

Le manomètre appliqué successivement à chacune des deux cuves a donné les résultats suivants :

CUVE.	NOMBRE DE COUPS.	COURSE.	ASPIRATION.	COMPRESSION.
De l'Est	14	1m,90	0m,1097	0m,046
»	13 3/4	»	0 1084	0 046
De l'Ouest	13 3/4	»	0 1044	0 045
»	9 1/2	1 63	0 077	0 042
De l'Est	11	1 70	0 088	0 0434
»	8 1/2	1 60	0 066	0 041

En comparant ces résultats, on trouve que pour une vitesse correspondant à 13 1/2 coups, la dépression moyenne de l'air avant son entrée dans la machine est mesurée par une colonne d'eau de 0m,046.

Que la dépression sous le piston est mesurée par une colonne d'eau dont la hauteur moyenne est de 0m,1064.

La compression pendant la descente du piston par une colonne de 0m,0455.

En faisant abstraction des pertes d'air et des résistances passives, on aurait pour le rapport de l'effet utile à l'effort total nécessaire pour déterminer le mouvement de l'air

$$\frac{455}{1519}=0,30.$$

Ce rapport est encore bien moindre lorsque la vitesse de la machine diminue. Il est seulement de

$$\frac{10}{119}=0,084.$$

Lorsque la machine ne donne que 9 $^1/_2$ coups.

13. Quoiqu'il fut facile de déduire de ces données, les causes de cet énorme déchet, j'ai voulu déterminer leur influence avec la plus grande précision, et le 16 juillet, dans une nouvelle série d'expériences, j'ai fait marcher la machine :

1°. Avec sa charge habituelle lorsqu'elle aspire l'air de la mine ;

2°. En donnant à l'air extérieur un libre accès sous les cuves, de manière à pouvoir apprécier avec exactitude la résistance de l'air au passage dans les clapets ;

3°. En ouvrant les clapets pour déterminer l'influence du frottement des pièces de l'appareil.

1re *Expérience.* La pression de la vapeur au manomètre de la chaudière était de 2 $^3/_4$ atmosphères (2^m^06 de mercure) ; la machine donnait 13 coups par minute et la course était de 1^m^,86.

Un manomètre à faible étranglement placé sur la cuve de l'Ouest a fourni les indications suivantes :

Pendant l'ascension du piston la dénivellation atteint 0^m^,11, descend à 0,096 remonte et oscille vers 0,1084 pour s'élever à la fin de la course à 0,123, soit en moyenne 0,1084.

Pendant la descente du piston, la compression est mesurée par une colonne d'eau, croissant régulièrement depuis 0^m^,039 jusqu'à 0,0474 soit en moyenne 0,0433.

2e *Expérience.* En ouvrant les portes et tampons des puits d'aérage de manière à laisser arriver directement l'air extérieur sous les cuves.

Pression de la vapeur 1^m^45 de mercure ; nombre de coups doubles 11 ; course 1^m^,68.

Pendant l'ascension du piston, la dénivellation s'élève à 0^m^,0745 descend à 0,0542 et oscille vers 0,063 que l'on peut considérer comme moyenne.

La compression est mesurée par une hauteur moyenne de 0,041.

Ainsi la force nécessaire pour introduire l'air à travers les clapets du fond des cuves est représentée par une colonne d'eau de 0^m^,063 pour une vitesse de 11 coups. (Nous verrons bientôt qu'elle ne varie pas pour une vitesse supérieure).

Nous aurons donc pour la dépression utile correspondant à une vitesse de 13 coups, 0^m,1084—0^m,063=0,0454.

Et pour le rapport de cette dépression à la force appliquée.

$$\frac{454}{1084+433}=0,30.$$

3me. *Expérience.* En ouvrant un grand clapet du piston.

Pression de la vapeur 1^m,17 ; nombre de coups 10 ; Aspiration 0^m,061. Compression 0^m,039.

En ouvrant deux grands clapets.

Pression de la vapeur 1^m,11 ; nombre de coups 11. Aspiration et compression 0^m,034.

En ouvrant cinq grands clapets, pour la même vitesse, l'aspiration et la compression sont de 0^m,006.

Enfin en ouvrant tous les clapets de manière à ce que l'air n'oppose plus aucun obstacle au mouvement la machine, celle-ci donne 9 coups sous une pression de vapeur de 0^m58 de mercure et s'arrête lorsque cette pression est descendue à 0^m52. Ce résultat établit que la résistance due au frottement des pistons dans les cuves, ne doit être qu'une fraction assez faible de la force appliquée ; mais cette résistance doit augmenter lorsque la machine est chargée, parce que la pression inégale qui existe à la circonférence du bourrage, et l'effort que supporte le piston lui-même donnent lieu à des trépidations qui se communiquent des pistons aux cuves et doivent entraîner des pertes de force assez notables.

Frottement des Pistons dans les Cuves.

14. D'après l'expérience précédente une pression de 0^m58 de mercure suffit pour vaincre le frottement des différentes pièces de la machine. Cette pression équivaut à une hauteur d'eau de 0^m,0909 sur le piston de l'une des cuves. Or, une pression de $^1/_2$ atmosphère, soit les deux tiers de 0,58 doit suffire pour mouvoir la machine seule ; resterait donc 0,0303 pour la hauteur correspondant au frottement des pistons dans les cuves.

En calculant d'ailleurs ce frottement par la méthode ordinaire on arrive aux résultats suivants :

La circonférence du piston est de 11^m1156 la hauteur du contact de bourrage avec la cuve est au moins de 0^m,11 , soit pour la surface de contact 1^{m2}223.

Les surfaces étant constamment enduites de savon dissous dans l'eau , nous admettons 0,15 pour le coefficient du frottement.

Mais il est une quantité indéterminée et essentiellement variable, c'est la pression du bourrage contre la cuve.

Eu égard à l'inégalité de son action, et pour éviter les fuites, la pression moyenne doit être au moins cinq fois la dépression maximum qui a lieu sous le piston, soit $0^m,615$ d'eau.

La pression totale sur une surface de 1,223 serait de 752,14 kil. qui multipliée par 0,15 donnerait un effort de 112,82 kil. pour chaque piston, soit pour les deux 225,64 kil. Cet effort réparti sur la surface de l'un des pistons ($9^{m2}84$) équivaudrait à une colonne d'eau de $0^m,023$, ou pour une vitesse de 14 coups à un travail de 2,66 chevaux

L'effet utile tel que nous l'avons déterminé précédemment, devra donc être encore diminué en tenant compte de cette résistance. La force nécessaire pour mouvoir l'air étant proportionnel à 1517, l'effort total sera proportionnel à 1747 ; l'effet utile à 454 multiplié par le coefficient 0,9 soit pour le rapport

$$\frac{454}{1747}\,0{,}9=0{,}26\times0{,}9=0{,}234.$$

Si on adoptait pour le frottement des pistons 0,0303 correspondant à une pression de $6\,{}^1/_2$ fois la dépression maximum, le rapport précédent serait égal à $\frac{454}{1820}\,0{,}9=0{,}2245.$

Influence des clapets sur la vitesse absolue de l'air sortant.

15. Un fait important qu'établissent les expériences précédentes, c'est le peu de variation qu'éprouve la pression nécessaire pour faire passer l'air à travers les ouvertures des clapets, lorsqu'on imprime à la machine des vitesses fort différentes. Cela tient à un phénomène particulier, dont l'étude permettra de faire disparaître le vice principal, que présentent toutes les machines à soupapes, et qui a fait considérer leur emploi comme peu rationnel. Si on supprimait entièrement les clapets, de manière à mettre à découvert toute la surface des ouvertures des pistons, il est évident que la pression nécessaire pour expulser l'air, serait en rapport direct avec la vitesse de la machine. Si au contraire, la section des ouvertures est beaucoup plus grande que celle qui reste libre, lorsque les clapets sont soulevés ; la vitesse de l'air sortant, et par conséquent la hauteur motrice perdue dépend uniquement du poids des clapets, ou de la résistance qu'ils opposent aux forces qui tendent à la soulever et nullement de la vitesse de la machine. L'effet est semblable à ce qui a lieu, lorsqu'un fluide s'échappe d'une capacité

formée de parois mobiles, maintenues par une force constante ; les parois s'écartent ou se rapprochent de manière à laisser entr'elles un orifice suffisant, pour que la pression génératrice du mouvement du fluide, que cet orifice doit débiter, soit égale à la force qui les retient : la vitesse de sortie est par conséquent invariable.

Si les clapets étaient parfaitement équilibrés, le choc de l'air sortant par les ouvertures du piston, aurait pour effet de les maintenir ouverts, dans une position verticale. Hors de là, ils s'inclineront d'autant plus sur la direction du courant, qu'ils opposeront une résistance plus grande aux forces qui tendent à les soulever. On peut d'ailleurs, lorsque les clapets sont largement ouverts, considérer l'orifice de sortie comme formé de deux parties distinctes : les ouvertures du piston, et les issues que les clapets laissent à leur pourtour, pour le dégagement de l'air. La suite nous apprendra, que dans les circonstances ordinaires de la pratique, la vitesse acquise au passage dans la première partie, n'absorbe qu'une hauteur motrice fort peu considérable; et qu'elle produit par choc une pression contre les clapets qui doit différer très peu de cette hauteur motrice. Si cette pression est insuffisante pour vaincre la résistance des clapets, ceux-ci s'abaissent de manière à ce que l'air reçoive dans la seconde partie de l'orifice, un excès de vitesse, due à une hauteur égale à celle qui mesurerait l'excès de la résistance.

Ainsi lorsque le poids du clapet rétrécit la seconde partie de l'orifice, et la rend inférieure à la première, la vitesse perdue dépend directement de ce poids ; et pour une résistance constante du clapet, elle ne peut varier que dans d'étroites limites, quelle que soit la vitesse de la machine.

16. Le 30 décembre 1843, j'ai entrepris de nouvelles expériences dans le but de mettre hors de doute cette manière de voir, et de déterminer en même temps, le coefficient de contraction qu'il convient d'adopter, pour le genre d'orifices auxquels donne naissance le soulèvement des clapets. Alors j'ai pu calculer, à quelle limite on peut réduire l'énorme perte de force motrice que présente la disposition actuelle.

La pression atmosphérique étant de 0,762 et la température de l'air sortant de 16°5; un manomètre appliqué à la cuve de l'Ouest a donné les indications suivantes :

Nombre de coups par 1'	13,7	12	10,6
Course du piston	1^m,88	1^m,73	1^m,68
Aspiration moyenne	0^m,095	0^m,0813	0^m,0745
Compression »	0^m,0433	0^m0433	0^m,042

Pour déterminer le coefficient de contraction, j'ai tenu les clapets ouverts, à l'aide de petits batons de longueur connue, et j'ai observé la pression nécessaire pour expulser l'air.

Le nombre de coups doubles par minute étant de 14,63, la course de 1^m,82 et l'extrémité des grands clapets étant soulevée de 0^m,1; l'aspiration était de 0^m,027 et la compression de 0,0244 lorsque les dix clapets étaient ouverts; pour neuf clapets les données correspondantes étaient de 0,031 et de 0,0298; enfin pour 7 clopets, la compression dépassait 0^m,0433, et les autres se soulevaient.

L'extrémité des grands clapets, étant écartée de 0^m,20 j'ai obtenu :

Nombre de coups.	Course.	Nombre de clapets soulevés.	Aspiration.	Compression.
14,63	1^m,82	5	0,^{m}0298	0^m,027
13,33	1^m,80	4	0,^{m}036	0^m,0332

des autres clapets se soulevaient lorsque trois seulement étaient entr'ouverts.

A l'aide d'un peson à ressort, j'ai constaté que l'effort moyen pour soulever les clapets des pistons, par l'extrémité opposée à la base, était approximativement; pour les grands de 5 kilogs., et pour les petits de 2,5 kilogs.

Les clapets ainsi que les ouvertures qu'ils recouvrent, sont des trapèzes réguliers, dont les dimensions sont respectivement :

	BASES.		COTÉS.	HAUT^r.	SURFACE.
Grands clapets	0^m,813	0^m,575		0^m,400	0^{m2}2776
Ouvertures	0, 770	0, 530	0^m,39	0^m,370	0, 2400
Petits clapets	0, 474	0, 26		0, 365	0, 1310
Ouvertures	0, 435	0, 21	0, 34	0, 322	0, 1030

L'effort nécessaire pour tenir les clapets ouverts, correspondrait d'après les donnees précédentes, à une pression uniforme de 0^m,038 d'eau pour les grands, et de 0^m,039 pour les petits; mais avant qu'ils soient soulevés, la pression de l'air ne s'exerçant que sur une partie de leur surface, égale à la section des ouvertures, devrait être équivalente à celle d'une colonne d'eau de 0^m,044 pour les grands et de 0^m,050 pour les petits.

L'expérience donne pour la pression moyenne nécessaire pour soulever les clapets des pistons 0m,0433 ; et pour celle qui doit être appliquée aux clapets du fond des cuves, 0m,063 ; soit pour la hauteur totale absorbée par la résistance qu'éprouve l'air, au passage des soupapes, 0,1063, représentant une vitesse perdue de plus de 41m. La dépression utile est mesurée par une colonne de 0m,454, inférieure à la moitié de la hauteur perdue.

Ce qui prouve d'ailleurs que cet énorme déchet est dû à la mauvaise construction de certaines pièces de la machine, c'est qu'en soulevant les grands clapets du piston, de 0m,1 seulement, la hauteur motrice nécessaire pour l'expulsion de l'air, se trouve réduite de 0m,0433 à 0m,0244.

Coefficient de contraction pour les ouvertures des clapets.

17. Les résultats des quatre dernières expériences nous permettent de calculer le coefficient de contraction qu'il convient d'adopter.

La densité de l'air débité par les ouvertures, différait peu de celle de l'air extérieur qui était alternativement aspiré et expulsé par ces ouvertures : soit $\frac{1}{800}$ cette densité rapportée à celle de l'eau.

	SECTION TOTALE DES OUVERTURES.	VITESSE SANS CONTRACTION.	VITESSE DUE A LA HAUTEUR OBSERVÉE.	COEFFICIENT.
1re Expérience	0^{m^2},8800	9m,93	18m,18	0, 546
2e	0, 7940	11m,03	21, 26	0, 52
3e	0, 6174	12, 75	22, 33	0, 57
4e	0, 7717	11, 34	20, 20	0, 567
	Moyenne.	. . . .	. . . .	0, 55

Les expériences indiquent que le coefficient serait de 0,533 pour 0m,1 d'écartement des clapets ; et de 0,568 pour un écartement de 0m,20.

Le coefficient obtenu étant très faible, pour déterminer s'il était dû à la forme des ouvertures, j'ai comparé ces résultats à ceux fournis par un orifice en mince paroi.

Dans deux expériences du § 13, j'ai observé que pour un volume théorique de $6^{m3},17$, la dépression et la compression sont de $0^m,34$ d'eau lorsque l'on ouvre complètement deux grands clapets ; et de 0^m06, lorsque cinq sont ouverts.

Les vitesses dues à ces hauteurs seraient respectivement de $22^m,66$ et de $9^m,48$; les vitesses sans contraction de 12^m85 et de $5^m,14$, ce qui donne pour coefficients 0,567 et 0,54 ou en moyenne 0,553.

Dans ce cas le coefficient devrait être au moins égal à 0,65. J'attribue la différence donnée par l'observation, à ce que la vitesse du piston, calculée d'après le nombre de levées est trop faible, à cause du petit arrêt qui a lieu à chaque changement de mouvement.

Il résulte de ces diverses données, que l'on ne doit pas prendre un coefficient de contraction supérieure à 0,55, lorsqu'on détermine la vitesse moyenne du piston d'après le nombre de coups par minute.

Limite de la vitesse de l'air sortant.

18. Le minimum de cette vitesse correspondrait à un soulèvement des clapets tel, que la section qui donne issue à l'air fut égale à la surface des ouvertures percées dans le piston.

Cette surface est de $2^{m2},40$ pour les grands clapets et de $1^{m2},03$ pour les petits, total $3^{m2}43$. Le volume théorique, engendré par la machine, pour une vitesse de 14 coups par minute et une course de $1^m,90$, est de $8^{m3}725$, ce qui donnerait pour la vitesse perdue minimum, $4^m,62$, (1) en prenant pour coefficient de contraction 0,55. Cette vitesse correspond à une hauteur d'eau de $0^m,00136$.

Dans la disposition actuelle des clapets on ne pourrait obtenir une section aussi considérable, qu'en leur donnant un écartement de $0^m,25$ pour les petits et de $0^m,34$ pour les grands (correspondant à un angle de 63°, 29'). Cette condition ne pourrait se réaliser dans la pratique ; mais on peut par une modification très simple, obtenir le même résultat avec un écartement beaucoup moindre : Il suffit d'attacher les clapets par la petite base ou lieu de les attacher par la grande base comme cela a lieu dans presque toutes les machines.

Cette modification présenterait les avantages suivants :

---

(1) La vitesse perdue serait en réalité un peu moindre, parce que le piston possède en sens inverse du courant une vitesse de $0^m,886$, qui réduirait la vitesse absolue de l'air sortant à $3^m,734$.



1°. La charnière moins longue opposerait moins de résistance au mouvement;

2°. Le centre du gravité du clapet, ou le point d'application de la pression qui tend à le soulever, se trouvant plus éloigné de la charnière, pour une même résistance la pression devrait être moindre;

3°. Enfin pour un même écartement du clapet, la section libre augmenterait dans un très grand rapport, surtout la partie la plus efficace pour le dégagement de l'air, celle qui est opposée à la charnière.

Dans l'exemple qui nous occupe, cette partie croîtrait dans le rapport de 1,45 à 1 pour les grands clapets et de 2,12 à 1 pour les petits. Pour un écartement de $0^m,20$ la section libre totale serait augmentée dans le rapport 1,3 à 1 pour les premiers, et de 1,5 à 1 pour les seconds.

Il suffirait alors pour réaliser l'effet proposé, d'obtenir des écartements respectivement de $0^m,22$ et de $0^m,16$.

Il faut maintenant déterminer, à quel point, dans cette supposition les clapets doivent être équilibrés en admettant que, pour un tel écartement, ils soient choqués par l'air qui s'échappe à travers les ouvertures du piston. On sait qu'en appelant P le poids du mètre cube du fluide, V la vitesse dont il est animé, S la surface choquée, I l'angle qu'elle forme avec la direction du mouvement, on obtient pour l'expression de la résistance éprouvée par un corps mince (1)

$$R=0{,}11PS^{1,1}V^2\ (\sin I)^{1,84\cos I}.$$

Si nous désignons par a l'angle, que forment les clapets avec la surface du piston, cette expression devient :

$$R=0{,}11PS^{1,1}V^2\ (\cos a)^{1,84\sin a}$$

Le calcul (2) indique que cette résistance équivaut à un poids,

(1) Voir Traité d'Hydraulique par M. d'Aubuisson, 2e édition, § 549 et 550.

(2) D'après les données de la question $P=1{,}25$ $V_{,}=4^m{,}62$. Pour les grands clapets $S=0{,}2776$; mais comme ils sont rencontrés par la veine contractée, nous ne prendrons que la moitié de cette quantité : les distances de la base de l'ouverture à la charnière et au clapet étant respectivement de $0^m,38$ et $0^m,22$ on a $0{,}38 \sin a=0{,}22$ ou $\sin a=\frac{11}{19}$; $\cos a=\frac{154}{190}$; $(a=35°23')$ d'où $(\cos a)^{1,88\sin a}=\left(\frac{154}{190}\right)^{1,06}$.

appliqué au centre de gravité des clapets, de $0^k,33$ pour les grands et de $0^k,166$ pour les petits. Par des contrepoids, disposés convenablement, on peut certainement les équilibrer jusqu'à cette limite.

La pression génératrice de la vitesse de sortie, répartie uniformément sur la surface des clapets, produirait des efforts, respectivement de 0,38 et 0,17 kilogs., fort peu différents de ceux trouvés par le calcul précédent. L'effet du courant augmenterait d'ailleurs à mesure que l'angle a diminuerait : mais bientôt aussi l'air cesserait d'agir par choc, et la pression du fluide de la cuve se transmettrait directement aux clapets.

On pourrait rendre les ouvertures plus grandes encore et procurer ainsi à l'air un dégagement plus facile ; mais les données qui précèdent font voir que l'on peut, à la rigueur, réduire la vitesse perdue au passage des clapets du piston, à $4^m,62$; vitesse inférieure à celle que le courant possède dans plusieurs parties des travaux. La même perte se répétant aux clapets des cuves (1) la hauteur totale perdue serait de $0^m,00136 \times 2 = 0^m,00272$ d'eau, correspondant à une vitesse de $6^m,51$.

Admettons même que l'on puisse difficilement atteindre cette limite, et que la hauteur perdue soit le double de cette quantité ou de 0^m0027 pour chaque passage : c'est supposer que les clapets opposent une résistance appliquée à leur centre de gravité, égale au moins à $0^m,66$ pour les grands, et à $0^m,33$ pour les petits. La hauteur totale absorbée par les résistances des clapets serait alors de $0^m,0054$ correspondant à une vitesse perdue de $9^m,21$ et réprésentant au travail de $^1/_8$ de cheval vapeur. Dans l'état actuel des choses, cette hauteur étant de $0^m,1063$ le travail perdu est de $12^m,37$ chevaux.

---

d'où $R = 0,11 . 1,25 . \left(\frac{0,2776}{2}\right)^{1,1} (4,62)^2 \left(\frac{154}{190}\right)^{1'06} = 0,\overset{\text{kil.}}{33}$ très approximativement.

Pour les petits clapets on trouve : $\sin a = \frac{16}{34}$ soit $\frac{1}{2}$, et $\cos a = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$S = \frac{0,131}{2}$ et

$R = 0,11 . 1,25 . \left(\frac{0,131}{2}\right)^{1'1} (4,62)^2 . \left(\frac{3}{4}\right)^{0\ 46}$ soit 0,166 kilog.

(1) L'air qui arrive aux clapets des cuves possédant déjà une certaine vitesse, la hauteur motrice nécessaire, dans l'hypothèse posée, serait un peu inférieure à 0,00136.

Un trop grand écartement des clapets serait toutefois sujet à un inconvénient : c'est la lenteur avec laquelle ils se fermeraient lors des changements de mouvement du piston. Dans les conditions que nous venons d'établir, cet inconvénient serait peu sensible, surtout si l'on a soin de n'équilibrer les clapets, qu'un peu au-delà du point nécessaire à l'effet qu'on veut obtenir. L'angle d'inclinaison des clapets sur les pistons étant peu ouvert, (il serait inférieur à 24° pour les grands et à 20° pour les petits) l'excès de poids qu'on peut leur laisser suffirait pour les ramener promptement sur leurs sièges.

Nous verrons bientôt que réduite à $9^m,21$, la vitesse perdue, qui avait principalement motivé l'essai de ventilateurs pour remplacer les machines à soupapes, est incomparablement moindre que celle qui a lieu dans tous les systèmes, qu'on a voulu leur substituer.

19. Nous savons que l'effet utile de la machine est proportionnel à une hauteur motrice de $0^m,0454$, si le passage de l'air dans les clapets n'exige plus que 0,0054 de hauteur, on aura pour le rapport de l'effet utile à l'effort employé $\frac{454}{508}=0,893$;

en ne tenant compte ni du frottement du piston ni des pertes d'air.

On admet ordinairement que l'effet de la première de ces résistances, est proportionnel à la différence maximum de la force élastique de l'air sur les deux faces du piston. Nous l'avons représenté par une colonne d'eau de $0^m,0303$ de hauteur, d'après l'effort nécessaire pour mouvoir la machine non chargée.

Dans les conditions précédentes, cette hauteur serait réduite de plus de moitié ou tout au plus égale à $0^m,015$, et l'on aurait, pour le rapport de l'effet utile théorique à l'effort appliqué au piston'

$$\frac{454}{658} = 0,69.$$

Pertes occasionnées par l'espace nuisible.

20. Nous avons admis que les pertes dues à l'espace nuisible et aux fuites d'air, ne dépassaient pas le dixième du volume théorique, dans les circonstances ordinaires : il nous reste à faire voir que ce chiffre ne doit pas même être atteint.

Ainsi que l'a prouvé M. Gonot, dans son rapport sur les appareils d'aérage, inséré dans le tome premier des Annales des Travaux

Publics, les pertes produites par l'espace nuisible, sont insignifiantes dans les machines pneumatiques.

En admettant même que le piston n'atteigne qu'à $0^m,50$ du fond de la cuve, le volume d'air contenu sous le piston sera de $4^{m^3},92$. La pression atmosphérique étant mesurée par une colonne d'eau de $10^m,33$, l'air pénètre dans la cuve sous une pression de $10,33-0,11=10,22$, et il est expulsé sous une pression de $10,33+0,043=10,373$.

La perte est mesurée par la dilatation qu'éprouve l'air de l'espace nuisible, en passant de la pression de $10^m,373$ à celle de $10^m,22$: cette dilatation est égale à $4,92\left(\frac{10,373}{10,22}-1\right)=0^{m^3},074$.

Le volume engendré par le piston étant de $18^{m^3},696$, on voit que la perte est seulement de $\frac{74}{18696}=\frac{1}{252}=0,004$.

Cette perte est en réalité encore moindre parce que vers la fin de la course les différences de pression doivent être inférieures aux moyennes, données par l'observation.

L'air d'ailleurs jouissant d'une élasticité parfaite restitue à la machine, précisément à l'instant où le mouvement change, toute la force absorbée par les variations de densité qu'il a subies.

Pertes d'air par les joints des clapets.

21. Les fuites d'air par les joints des clapets occasionnent une perte d'effet beaucoup plus sensible.

Dans une expérience, M. Combes a trouvé pour la machine de l'Espérance $8^{m^3},016$ au fond de la mine : le volume engendré par l'excursion des pistons était par seconde de $8^{m^3},725$ (1) : d'où l'on voit que la perte serait de $\frac{709}{8725}=0,081$.

Dans cette perte se trouve compris l'effet des diverses causes (§ 8) qui peuvent augmenter le volume du courant dans le parcours des travaux, jusqu'à son arrivée à la machine.

Dans la supposition d'ailleurs, où les clapets fermés, laisseraient même une ouverture de $0^m,001$, nous pouvons calculer que la perte due à cette cause atteindrait seulement de 0,06 à 0,07.

(1) M. Combes donne $9^m,024$, mais il a calculé ce volume dans la supposition que la course était de $2^m,05$ tandis qu'elle n'est en réalité que de $1^m,90$, au maximum.

Pendant l'ascension du piston, le volume engendré se remplit d'air qui afflue, en partie à travers les ouvertures des clapets de la cuve, en partie par les passages que laissent étant fermés les clapets du piston.

Désignons par V le volume total,
x et x' les quantités d'air;
s et s' les sections par lesquelles il pénètre,
h et h' les différences respectives de pression qui le font mouvoir, on aura :

$$x:x'=s\sqrt{h}:\ s'\sqrt{h'}$$

$$x'=\frac{x\,s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}}$$

mais $$V=x+x';$$

d'où $$x'=\frac{(V-x')s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}}=\frac{V\cdot s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}+s'\sqrt{h'}}$$

où pour simplifier $$x'=\frac{V\cdot s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}}$$

Pendant la descente du piston l'air sera expulsé, en partie à travers les ouvertures du piston, et rentrera en partie dans la galerie par les joints des clapets du fond. En prenant des notations analogues aux précédentes, nous aurons :

$$x'_1=\frac{Vs'_1\sqrt{h'_1}}{s_1\sqrt{h_1}}$$

et pour l'expression de la perte totale

$$x'+x'_1=V\left\{\frac{s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}}+\frac{s'_1\sqrt{h'_1}}{s_1\sqrt{h_1}}\right.$$

ou pour le rapport de la perte au volume théorique

$$\frac{x'+x'_1}{V}=\frac{s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}}+\frac{s'_1\sqrt{h'_1}}{s_1\sqrt{h_1}}.$$

Si l'on remarque que $\sqrt{2gh}$ et $\sqrt{2gh_1}$ représentent les vitesses perdues par le passage de l'air à travers les clapets, et que ces vitesses sont en raison inverse des sections s et s', des ouvertures de dégagement, on en conclura que $s\sqrt{h}=s_1\sqrt{h_1}$ et que, pour

une vitesse donnée de la machine, cette qnantité est invariable, quelle que soit la résistance des clapets.

Dans la machine de l'Espérance s' et s'_1, qui correspondent à un soulèvement de $0^m,001$, étant représentées par 1; $s\sqrt{h_1}=s_1\sqrt{h_1}$ sera très approximativement égal à 9,40. En effet pour un écartement de $0^m,1$ on a $\sqrt{h}=0,094$.

L'expérience donne d'ailleurs $h'=0,11$, $h'_1=0,0454+0,0433$ $=0,0887$, $h=0,063$ et $h_1=0,0433$

d'où $$\frac{x'+x'_1}{V}=\frac{1}{9,40}(\sqrt{0,11}+\sqrt{0,0887})=0,066.$$

Dans la supposition où les résistances de l'air au passage des clapets seraient mesurées par une colonne de 0,0027 on aurait : $h'=h'_1=0,0454+0,0027=0,0481$; $h_1=h=0,0027$; d'où

$$\frac{x'+x'_1}{V}=2\,\frac{s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}}=\frac{2}{9,40}\sqrt{0,0481}=0,047.$$

On voit que dans les conditions que nous avons supposées, conditions que la pratique peut certainement réaliser, la perte ne s'élèverait pas à $\frac{1}{20^e}$.

22. Le calcul précédent nous fournit d'ailleurs quelques indications utiles :

Le terme $\frac{s'}{s}$ entrant comme facteur dans l'expression des pertes d'air, on voit que celles-ci seront en raison inverse de la quantité dont les clapets sont soulevés. Il en résulte qu'entre certaines limites (§ 18), il est préférable de diminuer la vitesse absolue de l'air sortant en donnant aux clapets un grand écartement, plutôt que de grandes dimensions avec un faible écartement.

Ainsi dans l'état où se trouve la machine de l'Espérance, il serait avantageux de boucher un certain nombre d'ouvertures. Les autres clapets se soulèveraient davantage et la pression pour expulser l'air resterait la même, tandis que les joints par lesquels l'air peut se perdre seraient moins nombreux.

Le calcul précédent nous fait voir aussi que les pertes augmentent à-peu-près dans le rapport des racines carrées des différences de pression qui ont lieu sur les faces des clapets fermés. On réduit donc ces pertes, en diminuant la vitesse absolue de l'air au passage des soupapes.

Dans le dernier exemple, on a pour expression de la quantité perdue,

$$\frac{x'+x'_1}{V}=2\frac{s'\sqrt{h'}}{s\sqrt{h}},$$

dans laquelle h' se compose de la hauteur motrice utile 0,0454, plus 0,0027 pour la résitance de l'air dans les ouvertures. Cette dernière étant invariable on voit que la perte est à-peu-près proportionnelle à la racine carrée de la dépression dans les galeries d'appel.

Remarquons toutefois que plus les différences de pression h' et h'_1 sont considérables plus les clapets doivent tendre à se fermer exactement : mais cette cause doit être insuffisante pour compenser l'effet nuisible d'une plus grande pression.

Effet utile des machines à pistons.

23. Si, dans les conditions où se trouve la machine de l'Espérance, nous admettons que la perte soit de 0,08, chiffre que donne l'expérience rapportée plus haut ; nous serons certains de ne pas faire de supposition trop favorable. Les résultats du § 19 devront en conséquence être multipliés par 0,92, pour exprimer l'effet utile pratique d'une machine construite d'après les principes que nous avons développés.

Cet effet, sans le frottement du piston, sera de 0,82, et en ayant égard à ce frottement de 0,635.

24. En résumant le résultat des recherches qui précèdent, on trouve que la force appliquée aux pistons de la machine de l'Espérance représente un travail de 21,177 chevaux :

Effet utile (23 p. %)	4,858
Pertes d'air	0,422
Résistance des clapets	12,37
Frottement des pistons	3,527
Total	21,177

Une force théorique de 33,66 chevaux étant suffisante pour mouvoir l'appareil, la machine rendrait 0,63 ou les $^5/_8$ de cette force.

Une machine construite avec les modifications que j'ai exposées exigerait pour le même résultat un travail de 7,67 chevaux :

Effet utile (63 p. %)	4,858
Pertes d'air.	0,422
Résistance des clapets	0,63
Frottement des pistons.	1,763
	7,671

Ce qui supposerait une force théorique de $7{,}67 \cdot \frac{8}{5} = 12{,}27$ chevaux, ou un peu plus du tiers de la force actuelle (1).

Inconvénients que présentent les pistons.

25. Une machine établie dans ces dernières conditions réaliserait un effet bien supérieur à celui que produisent tous les systèmes dont on a fait usage. L'emploi des pistons présente néanmoins plusieurs inconvénients :

1°. Le frottement dans les cuves, entraîne d'après ce que nous venons de voir, une perte de travail qui doit être supérieure au tiers de l'effet utile.

2°. Les frais d'entretien, tant pour le savon que pour le renouvellement du bourrage, sont très considérables. A l'Espérance, les cuves coutent annuellement pour ces deux objets :

6 dos de cuirs pour boyaux à	frs.	26	Frs.	156,00
36 kilogs. de crins à	»	3	»	108,00
36 kilogs de tresse à	»	1,40	»	50,40
83 tonneaux de savon noir à	»	7,25	»	601,75
Total			Frs.	916,25

3°. Par l'inégalité de la pression du bourrage et de l'usure des cuves, il se produit des fuites d'air à la circonférence des pistons.

Ces divers inconvénients, les deux premiers surtout, sont les plus graves que présentent les machines de ce système.

La substitution des cloches plongeantes aux pistons les fait complètement disparaître.

(1) Le Hainaut possède plusieurs machines du même système que celle de l'Espérance, et toutes présentent les vices que nous avons signalés dans cet appareil. Dans quelques-unes les clapets des pistons sont munis de contrepoids ; mais ils sont disposés de telle manière que l'air ne trouve pour son dégagement qu'une issue insuffisante et possède toujours une vitesse absolue considérable. Dans aucune les clapets des cuves ne sont équilibrés.

Machine à Cloches établie à la houillère de Marihaye.

26. L'appareil de ventilation, planche II, consiste en deux cloches cylindriques en tole de $3^m,66$ de diamètre et $2^m,60$ de hauteur, se mouvant dans des cuves annullaires, formées de deux cylindres concentriques de $3^m,51$ et de $3^m,81$ de diamètre.

Chaque cylindre intérieur est fermé à sa partie supérieure par un diaphragme en tôle, percé, ainsi que le fond de chacune des cloches et seize ouvertures recouvertes par des clapets. Les cloches sont séparées par un massif de maçonnerie, sur lequel se trouve établi horizontalement le cylindre à vapeur, et sont attachées aux extrémités de la tige du piston à l'aide de chaînes anglaises passant sur des poulies de renvoi.

Deux puits d'aérage, situés aux côtés opposés de la machine, sont mis en communication par une galerie qui passe sous les cloches.

Expériences.

27. J'ai fait sur cette machine des expériences variées et analogues à celles dont j'ai exposé les résultats pour la machine de l'Espérance : je rapporterai les principales.

Le 16 mai 1843, la machine donnait dix coups doubles par minute, la course du piston était de $1^m,95$ et la pression de la vapeur de 2 $^5/_8$ atmosphères.

Un manomètre à étranglement, placé successivement sur les tampons qui bouchent les puits a donné les résultats suivants :

Sur le tampon de l'Est, pour une course double du piston, la dénivellation croissait régulièrement depuis $0^m,0115$ jusqu'à $0^m,0528$ diminuait ensuite plus lentement jusqu'à $0^m,0284$, puis très brusquement, après la fermeture des clapets, jusqu'à $0^m,0054$ d'où elle s'élevait régulièrement à $0^m,0481$ pour diminuer jusqu'à $0^m,0345$ où elle stationnait quelques instants et tombait ensuite à 0,0115 point de départ :

On a, en résumé pour la mesure de la dénivellation moyenne :

	CLOCHE No. 1.	CLOCHE No. 2.	
1re. Partie de l'ascension	$\frac{0{,}0115^m+0{,}0528^m}{2}=0^m{,}03215$	$\frac{0{,}0054^m+0{,}0481^m}{2}=1{,}02675^m$	
2e. Partie de l'ascension	$\frac{0{,}0528+0{,}0284}{2}=0\ 0406$	$\frac{0.0481+0.0345}{2}=0\ 0413$	
Dénivellation moyenne.	0^m03675	$0^m{,}034025$	$0^m{,}03539$

L'expérience donne pour le tampon de l'Ouest une dénivellation de $0^m{,}0358$; soit pour la moyenne générale $0^m{,}0356$. Un manomètre plus étranglé a donné, pour une vitesse de 9 $^1/_2$ coups, les indications suivantes sur le 1er. tampon :

La dénivellation croit de $0^m{,}026$ à $0^m{,}039$, descend ensuite régulièrement à $0^m{,}34$ et rapidement de ce point à $0^m{,}023$, pour remonter à $0^m{,}0366$ ou elle reste stationnaire, puis à la fin de la course elle descend rapidement à $0^m{,}026$ point de départ. La moyenne de ces indications calculées comme précédemment serait de $0^m{,}0345$.

Le premier manomètre appliqué sur le même tampon, indiquait pour une vitesse de 4 $^3/_4$ coups par minute : dénivellation maximum $0^m{,}012$, décroissant régulièrement jusqu'à $0^m{,}004$; puis une dénivellation en sens inverse de 0,003, suivie d'une aspiration marquée par une colonne de 0,011 décroissant jusqu'à $0^m{,}003$ où il y a un point d'arrêt, suivi d'une compression de $0^m{,}003$.

La dépression moyenne serait de $0^m{,}0066$ environ.

Sur l'une des cloches pour la même vitesse, l'aspiration moyenne était indiquée par une colonne de $0^m{,}011$, la compression par une colonne de $0^m{,}004$.

28. Le 26 novembre 1843, la machine donnait 11 coups par minute, la course était de $1^m{,}78$, et la pression de la vapeur de 2 $^1/_2$ atmosphères effectives. Un manomètre à étranglement, placé sur l'un des tampons, indiquait une dénivellation croissant de $0^m{,}033$ à 0,052 pour diminuer régulièrement jusqu'à 0,047, on se trouvait au point d'arrêt ; de là, diminution rapide jusqu'à 0,032,

suivie d'une ascension régulière jusqu'à 0,053, à laquelle succédait une descente à-peu-près uniforme jusqu'à 0,033 point de départ.

La moyenne de ces indications serait de $0^m,0443$.

Un manomètre placé sur la cloche de l'Ouest, indiquait une dénivellation qui s'élevait rapidement à $0^m,108$ pour descendre régulièrement jusqu'à 0,054, où elle restait stationnaire pendant plus de la moitié de la course ; soit en moyenne pour la première partie de la course $0^m,081$, et pour la deuxième partie $0^m,054$, ou pour le degré moyen de la dilatation $0^m,0675$.

La compression moyenne était de $0^m,0108$.

Sur la seconde cloche, l'aspiration était la même et la compression moyenne de $0^m,0095$.

On aurait ainsi pour l'aspiration.	$0^m,0675$
— — pour la compression.	$0^m,01015$
Ou un effort total proportionnel à	$0^m,07765$
L'effet utile théorique serait proportionnel à . .	0,0443
Soit pour le rapport de ces deux quantités $\frac{4430}{7765}=0,57$	
Et en supposant même 0,1 de perte	0,513

En donnant à l'air extérieur un libre accès sous les cloches, par les tampons des puits, un manomètre placé sur la cloche de l'Est a donné les indications suivantes :

10 coups en 58″ ½

Aspiration moyenne	$0^m,023$
Compression.	$0^m,0094$

La pression de la vapeur correspondante était de 1 ¾ atmosphères effectives.

Dans une expérience, la machine seule, détachée des cloches exigeait une pression de vapeur de 0,4 atmosphères pour une vitesse de 10 coups par minute, et une course de $1^m,95$.

En ajoutant à la dépression $0^m,023$, celle que nous avons trouvée dans la galerie, on a pour la dépression totale $0^m,0673$, qui est à-peu-près égale à celle que nous avons déduite de l'expérience directe.

Causes qui font varier la compression de l'air dans les galeries d'appel.

29. On aura pu remarquer par la marche des colonnes liquides, que la compression de l'air, à la suite de la fermeture des clapets,

est plus sensible à la mine de Marihaye qu'à celle de l'Espérance.

La principale cause c'est qu'à Marihaye la machine se trouve posée presque directement sur les puits, qui ont moins de 2^{m2} de section, tandis que la section des puits de l'Espérance est de plus de 3^{m2} et qu'ils se trouvent séparés de la machine par une galerie d'assez grandes dimensions qui fait l'office de régulateur.

Lorsque les puits sont très étroits, on voit qu'il serait avantageux, pour la régularité du mouvement de l'air, de disposer d'une capacité assez grande à proximité des machines aspirantes. Selon les circonstances on atteindrait ce but, soit par la construction d'une galerie de grande section, soit par le creusement d'un large puits de 30^m à 40^m de profondeur, dont le pied serait mis en communication avec le puits d'aérage.

On peut du reste par un calcul très-simple trouver approximativement la capacité dont il faudrait disposer pour rendre la compression nulle.

En appelant C le volume de cette capacité, v la vitesse moyenne du piston, S sa surface, t le temps d'arrêt du piston exprimé en secondes, H la pression atmosphérique, h la dépression dans les galeries d'appel; le volume aspiré par seconde sera égal à Sv, et pendant le temps t, il affluera de la mine dans la capacité C un volume Svt. Si l'air contenu dans cette capacité, était ramené à la pression extérieure, son volume diminuerait de la quantité

$$C\left(1-\frac{H-h}{H}\right)=\frac{Ch}{H}.$$

Et si cette quantité était égale au volume introduit Svt, il n'y aurait plus de compression.

D'un autre côté le temps d'arrêt t doit être sensiblement en raison inverse de la vitesse moyenne du piston, on aura donc $t=\frac{k}{v}$, k étant une quantité constante à déterminer, et par suite

$$\frac{Ch}{H}=Sk.$$

d'après cette équation, on voit que la capacité doit être :

1°. Proportionnelle à la surface du piston ;

2°. En raison inverse de la dépression. Cette dernière relation explique pourquoi dans certaines machines, où la dépression est considérable, le phénomène de la compression ne s'observe pas.

La quantité dont la dilatation diminue pendant les interruptions du mouvement, est inférieure à la différence de pression qui existe entre l'air extérieur et l'air aspiré.

La surface des cloches de Marihaye étant plus grande que celle des pistons de l'Espérance (dans le rapport de 10,51 à 9,84), cette circonstance tend à rendre la compression plus grande à la première de ces mines. Cet effet doit encore être augmenté par le choc que produit sur les tampons l'air, qui monte dans les puits avec une vitesse de $3^m,50$ au moins.

Si on supposait que pendant le temps d'arrêt, $Sk=1^{m^3}$, pour la machine de Marihaye, prenant $h=0,0443$, $H=10,33$, on aurait $C=233^{m^3}$, ce qui exigerait un puits de $3^m,50$ de diamètre sur 25^m environ de profondeur. Si l'on avait $Sk=2^{m^3}$, ce qui supposerait $t=\frac{2}{6,83}=0'',3$ seulement, la profondeur du puits devrait être double. On voit que pour de faibles dépressions et un grand diamètre des pistons il serait souvent difficile d'obtenir des capacités assez étendues.

On pourra d'ailleurs calculer à quelle distance de la machine se propage la compression, puisque les puits faisant l'office de régulateur, il se trouve une section telle que la diminution de volume éprouvée par l'air renfermé dans les espaces supérieurs, est égale au volume qui a passé par cette section dans l'intervalle de l'aspiration.

Effet des clapets sur la vitesse absolue de l'air sortant.

30. L'effet utile que nous avons trouvé de 51 pour °/₀ pourrait être considérablement augmenté, si les clapets étaient convenablement établis.

Chaque cloche porte 16 ouvertures, 8 grandes, et 8 de moindres dimensions. Celles-ci sont des trapèzes réguliers; les premières sont des trapèzes terminés du côté de la grande base par un segment de cercle. Leurs dimensions et celles des clapets qui les recouvrent sont respectivement :

	TRAPÈZES.			SEGMENT.		
	bases.		hauteur.	arc.	rayon.	flèche.
Grands clapets	0m,94	0m,67	0,m35	0m,96	1m,42	0m,09
Ouvertures	0, 90	0, 63	0, 30	0, 92	1, 38	
Petits clapets	0, 60	0, 32	0, 38			
Ouvertures	0, 55	0, 27	0, 35			

Tous les clapets sont munis de contrepoids et attachés par leurs petites bases. Aussi la vitesse perdue dans cette machine est bien moindre que dans celle de l'Espérance. Néanmoins elle exige encore une hauteur motrice de 0m,01015 pour les clapets des cloches et de 0m,023 pour ceux des cuves, total, 0m,03315 représentant une vitesse de 22m,77; mais il est possible de réduire considérablement cette perte.

En mesurant directement l'effort nécessaire pour soutenir les clapets par l'extrémité opposée à la charnière, nous avons trouvé 1kil.,25 pour les grands et 1kil. pour les petits, correspondant respectivement à des pressions de 0m,0064 et 0m,0103 d'eau.

L'effort nécessaire pour soulever les grands clapets du fond est au moins quatre fois aussi considérable que pour ceux des cloches, ce qui rend compte de la pression que nécessite l'ouverture de ces clapets. Mais ces chiffres ne sont qu'approximatifs parce que l'effort varie lorsqu'il y a mouvement, non-seulement par l'effet du frottement des clapets et des leviers qui soutiennent les contrepoids, mais aussi par la manière dont ceux-ci sont disposés.

Ainsi qu'on peut s'en convaincre par l'inspection de la planche II, l'action des contrepoids des cloches, loin d'être constante, va en augmentant jusqu'à ce que le levier soit dans une position horizontale; après quoi elle diminue rapidement. Aussi lorsque les clapets s'ouvrent, il y a d'abord un mouvement rapide, en vertu duquel ils s'élèvent à toute la hauteur que leur permet d'atteindre la constitution du système; ils retombent bientôt, et oscillent jusqu'à la fin du mouvement autour de la position horizontale du levier, qui correspond à une ouverture de 0m,055 environ pour les grands clapets et de 0m,06 pour les petits.

Dans ces conditions, la section moyenne de l'ouverture de dégagement de l'air et de $0^{m^2},054$ pour un petit clapet, et de $0^{m^2},0671$ pour un grand, soit pour la section totale $0^{m^2},9688$.

Le volume engendré par les cloches étant de $6^{m^3},83$, la vitesse de l'air sortant, en prenant 0,55 pour coefficient de contraction serait de $12^{m},8$, représentant une hauteur motrice de $0^{m},0104$, chiffre qui diffère très-peu de celui donné par l'observation.

D'après la disposition des clapets ceux-ci s'ouvrent à-peu-près de la même quantité, quel que soit le volume aspiré. Lorsque le volume diminue, la vitesse de l'air sortant est moindre, ainsi que la hauteur perdue : dans une expérience (§ 27) la compression est seulement de $0^{m},004$ pour une vitesse de 4 $^1/_4$ coups par minute.

Limite de la vitesse absolue de l'air sortant.

31. La surface totale des ouvertures recouvertes par les clapets est de $3^{m^2},17$, et l'on peut voir qu'il reste à la circonférence des cloches une large couronne qui en est dépourvue; la surface totale de la cloche dépasse d'ailleurs trois fois cette quantité.

Si l'air s'échappait librement par les ouvertures de la cloche, la vitesse perdue pour une contraction de 0,45 et un volume de $6^{m^3},83$ serait de $3^{m},9$, représentant une pression de $0^{m},001$ d'eau. Cette vitesse correspondrait à un écartement des clapets de $0^{m},15$ au moins pour les petits et de $0^{m},22$ pour les grands.

La pression de $0^{m},001$ d'eau repartie sur la surface des clapets représenterait un effort appliqué au centre de gravité de $0^{kil.},175$ pour les premiers et de $0^{kil.},324$ pour les seconds.

Admettons que la hauteur perdue au passage des clapets au lieu d'être conforme à l'hypothèse précédente, soit deux fois et demi plus grande, ou $0^{m},0025$ d'eau pour chaque passage. La hauteur totale perdue sera de $0^{m},005$ correspondant à une vitesse de $8^{m},86$.

Dans cette supposition, la dépression utile étant proportionnelle à $0^{m},0443$, l'effort total sera proportionnel à $0^{m},0493$; et l'on aura pour le rapport de ces deux quantités

$$\frac{443}{493} = 0,9$$

Et en supposant même que les pertes s'élèvent au dixième du volume théorique, l'effet utile sera encore de 81 p. $^0/_0$.

Disposition à donner aux clapets des cloches.

32. Dans ces clapets, outre l'influence nuisible d'une course trop limitée, les leviers des contrepoids sont engagés de telle manière qu'ils ne peuvent se mouvoir sans donner lieu à un frottement considérable ; et leurs supports sont si peu élevés, que les contrepoids des clapets intérieurs viennent choquer les clapets extérieurs.

On remédierait à tous ces inconvénients :

1°. En plaçant le point d'appui des leviers sur la verticale qui passe par la charnière des clapets ;

2°. En disposant ces leviers de manière que l'action des contrepoids fût constante, ou augmentât à partir du contact d'une faible quantité (planche II, fig. 3 et 4) ;

3°. Enfin, en donnant à l'axe de suspension des leviers une forme telle que le frottement y fut très peu sensible.

On doit aussi établir les charnières en cuir qui retiennent les clapets, de manière à ce qu'elles n'opposent qu'une faible résistance au mouvement de ces derniers.

Les contrepoids doivent être attachés aux leviers au moyen d'une vis de pression qui permette de les déplacer. On pourra déterminer la limite à laquelle les clapets doivent être équilibrés, à l'aide d'un manomètre appliqué à la cloche, qui indiquera la compression pour les diverses positions des contrepoids.

Disposition à donner aux clapets des cuves.

33. Si les dispositions precédentes doivent paraître suffisantes pour les clapets des cloches, qui sont à découvert et sous les yeux du machiniste, je pense qu'elles ne seraient plus convenables pour ceux des cuves. Ceux-ci ne pouvant être visités fréquemment sont exposés à se charger d'humidité et de crasses, de manière à ne plus être équilibrés que fort imparfaitement. On peut échapper à cet inconvénient en donnant aux clapets du fond une position verticale ou peu inclinée, qui empêchent les crasses de se déposer à leur surface et dans tous les cas rendre un excès de poids peu sensible. Comme l'influence de l'espace nuisible est très minime, on atteindrait ce but en appliquant les clapets aux parois verticales d'un prisme régulier à bases concentriques au cylindre intérieur, ou plutôt aux arêtes d'un tronc en pyramide, placé de la même manière.

Dans le premier cas les charnières seraient verticales et les clapets devraient être ramenés par de légers contrepoids ; dans le second cas, le poids des clapets tendrait à les tenir fermés.

Frottement des cloches.

34. Les cloches portent à l'extérieur quatre planches glissant sur quatre autres planches fixes, enduites de savon, qui les guident verticalement dans l'espace annulaire rempli d'eau. De là deux résistances, celle de l'eau et le frottement des planches.

Lorsque la machine est bien disposée, ce frottement peut se négliger dans les calculs, parce que la pression est très faible et la surface de contact peu étendue.

On pourrait du reste substituer avec avantage à ces planches, des tringles de fer fixes, sur lesquelles glisseraient de petites poulies attachées aux cloches.

La résistance de l'eau, quoique négligeable, pour la vitesse de la machine, deviendrait bientôt sensible pour une vitesse plus considérable.

En appelant s la surface de contact du liquide, π le poids du mètre cube, v la vitesse du mouvement, g l'action de la gravité, les principes de la mécanique donnent pour l'expression de la résistance :

$$R=\pi\frac{k}{g}s(v^2+bv);$$

$$\frac{k}{g}=0{,}00035 \text{ et } b=0{,}05.$$

Dans la machine de Marihaye, la surface de contact est invariable, l'une des cloches descendant toujours de la même quantité dont l'autre s'élève. Prenons pour calculer cette surface une position extrême du piston. L'une des cloches plonge alors de $2^m{,}25$ environ, l'autre de $0^m{,}30$, soit pour la hauteur totale $2^m{,}55$. La circonférence de la cloche étant de $11^m{,}5$, et celle-ci étant mouillée sur ses deux faces, la surface totale de contact sera de $58^{m^2}65$. Comme $v=0^m{,}65$, on aura pour l'expression de la résistance

$$R=1000\cdot 0{,}00035\cdot 58{,}65\cdot 0{,}455=9^{kil.}{,}34.$$

Cette résistance équivaut à une pression, repartie sur la surface de l'une des cloches, inférieure à $0^m{,}001$ d'eau et le travail absorbé est d'environ $^1/_{12}$ de cheval.

Pour une vitesse de 1^m, la résistance serait de $21^{kil.},48$, correspondant à une pression de $0^m,002$ d'eau et à un travail de chev. 0,3.

Espace nuisible produit par le déplacement du liquide.

35. Dans les machines à cloches plongeantes, on doit ajouter à l'espace nuisible des machines à pistons, la perte d'effet dûe aux changements de niveau du liquide contenu dans l'espace annulaire.

Cette perte est représentée par un volume ayant pour base, la couronne qui existe entre la cloche et le cylindre intérieur, et pour hauteur, la différence des niveaux du liquide au commencement et à la fin de la course. Pour une différence de pression totale de $0^m,07765$, le niveau dans chaque couronne ne varierait que de la moitié de cette quantité, ou de $0^m,03883$, si les cloches étaient sans épaisseur.

La perte serait d'environ $0^{m^3},034$ ou de 0,0017 du volume théorique, perte, comme on le voit, très minime.

Mais en réalité, cette perte est bien moindre encore. Les cloches ayant une épaisseur de $0^m,003$ occasionnent par leur descente un déplacement de liquide dont la hauteur est proportionnelle au rapport de cette épaisseur à la largeur de l'espace annulaire. Ce rapport étant égal à $\frac{0,003}{0,3}=0,01$, pour une course de $1^m,95$ le liquide s'élève de $0^m,0195$, ce qui réduit les différences de niveau au commencement et à la fin de la course à $0^m,01933$ et la perte à moins de $0^{m^3},0175$ ou 0,00085 du volume théorique.

La perte est encore diminuée par ce que les planches attachées aux cloches déplacent une certaine quantité de liquide. On voit qu'en faisant varier soit la largeur de l'espace annulaire, soit le volume des parties qui plongent dans l'eau, soit la longueur de la course, on peut entièrement annuler ce genre de perte et même diminuer ou compenser celle due à l'espace nuisible.

Frottement des chaînes et des poulies.

36. Quoique l'emploi des chaînes et des poulies ne soit nullement inhérent au système que nous examinons, et n'ait d'autre effet que de remplacer le balancier et les parallélogrammes des autres machines, j'ai néanmoins calculé le travail perdu par le frottement de ces pièces mécaniques, pour juger de leur influence sur la marche de la machine.

Dans le principe les cloches étaient suspendues par des chaînes ordinaires ; mais la pression, pour chaque anneau, n'ayant lieu que dans un espace très limité, ces chaînes s'usaient promptement, et les ruptures étaient très fréquentes. Elles occasionnaient aussi dans le mouvement des cloches des déviations de la verticale; d'où résultaient des chocs contre les clouures des cuves, qui donnaient lieu à des pertes de force, et à un bruit assez intense.

Ces inconvénients ont disparu par l'emploi de chaînes anglaises qui donnent plus de rigidité au système.

D'un autre côté les chaînes tendent à donner une légère irrégularité au mouvement. Lorsque le piston atteint une des extrémités du cylindre, il est sollicité vers cette extrémité par le poids d'une longueur de chaîne de $1^m,95$ ou de $80^{kil.}$ environ, qui ne se trouve pas équilibré directement. Mais par la constitution de la machine, l'équilibre se produit indirectement : la cloche que soutient la chaîne est descendue de la même longueur dans l'eau et a perdu de son poids une quantité qui compense et au-delà l'excès de poids de cette chaîne et favorise avec la réaction de l'air enfermé sous la cloche, la reprise du mouvement en sens inverse.

On a pour calculer le travail absorbé par les frottements les données suivantes :

Distance de l'axe de la poulie à celui de la chaîne. .	$0^m,63$
Rayon des tourillons des poulies.	$0^m,038$

Poids d'une cloche 1665 kil., d'une poulie 250 kil., d'une chaîne 160 kil., total 2075 kil.

La dépression sous l'une des cloches étant de $0^m,0675$, et la compression sous l'autre de $0^m,01015$, on a au maximum, pour la pression verticale sur le tourillon le plus chargé :

Poids total de la cloche, de la chaîne et de la poulie (1)		kil. 2075
Pression de l'air,	$10,51 \times 67,5$	709
	Total	2784

Pour la pression horizontale :

Le poids de la cloche. . . . . kil.	1665
Charge de la cloche	709
Moitié du poids de la chaîne.	80
Force pour vaincre les frottements, soit. . .	40
Total	2494

La vitesse du piston étant de $0^m,65$, et le coefficient du frotte-

(1) On ne tient pas compte de la perte de poids de la cloche dans l'eau.

ment de fer sur cuivre bien graissé de 0,07 on trouve pour le travail absorbé

$$0{,}07\times\frac{0{,}038\cdot65}{63}\sqrt{(2784)^2+(2494)^2}=10^{km},26$$

Pour l'autre tourillon la pression verticale est de 2075—10,51 × 10,15=1969 kil. La pression horizontale est un peu inférieure à 1665+80—106=1639 kil.

Et le travail perdu est de. . . . . $7^{km},03$

Soit pour le travail total . . . . $17^{km},29$

Pour déterminer le frottement des chaînes, le rayon du trou des chaînons étant de $0^m,015$, un point de la circonférence parcourt par seconde $\frac{0^m,015\cdot65}{63}\times0^m,0252=0^m,0155$.

En prenant $^1/_8$ pour le coefficient du frottement de fer sur fer mouillé, on trouve que le frottement absorbe :

d'un côté un travail de	$15^{km},33$
De l'autre.	10, 15
Total.	$25^{km},48$

ou $^1/_3$ de cheval.

Le travail perdu par les deux résistances que nous venons d'examiner est donc de $42^{km},77$ ou 0,57 de cheval-vapeur, équivalent à une pression de $0^m,006$ d'eau sur l'une des cloches.

D'un autre côté, j'ai lieu de croire que la chaîne est encore trop faible et qu'il conviendrait de donner plus de solidité aux boulons. On pourrait, dans les machines qu'on aurait à établir, compenser avantageusement le surcroît de résistance qui en résulterait, en donnant aux poulies un diamètre plus grand.

Pertes d'air.

37. Je n'ai pu déterminer avec exactitude les pertes d'air qui ont lieu par les clapets, parce que l'air aspiré ne se trouvait réuni dans aucun endroit convenable pour ces sortes d'expériences. Un jaugeage exécuté à l'entrée des travaux inférieurs, à 237^m de profondeur, m'a donné $4^{m^3},2$; le volume théorique était de $6^{m^3},83$; mais une partie de l'air passait par l'étage supérieur à 179^m de profondeur. Cet étage ayant été fermé par des portes, j'ai trouvé dans une autre expérience $4^{m^3},555$ pour le volume d'air qui alimentait les travaux du midi et auquel il faut ajouter une quantité indéterminée qui passait par deux tailles plus rapprochées du puits.

D'après la manière dont se trouve établie la machine de Marihaye,

les pertes doivent être moindres qu'à celle de l'Espérance. En supposant qu'elles soient comme nous l'avons admis pour cette dernière, les 0,08 du volume théorique, nous serons certainement en dessus de la réalité.

Pour éviter l'aspiration de l'air extérieur par les tampons des puits, on a adopté un mode de fermeture, indiqué dans le cours de M. de Vaux, et qui consiste à faire plonger dans une rigole annulaire remplie d'eau, les bords d'une cloche en tôle de quelques centimètres de hauteur. Cette fermeture est non-seulement tout-à-fait étanche, mais elle peut s'ouvrir avec la plus grande facilité; et en cas d'explosion dans l'intérieur de la mine, elle n'opposerait pas de résistance au choc des gaz, et la machine échapperait très probablement à cette cause de destruction.

Effet utile des machines à Cloches Plongeantes.

38. Les diverses considérations qui précèdent nous montrent que le travail dépensé par le mouvement des cloches de la machine de Marihaye, dans les circonstances où nous l'avons examiné est de 7,07 chevaux :

Effet utile (52 pour °/₀).	chev.	3,711
Pertes d'air (0,08)		0,323
Résistance des clapets.		3,037
	Total.	7,071

La surface du piston étant de 506 centim. carrés, (10 pouces anglais de diamètre) pour une vitesse de $0^m,65$ et une pression de $2\ {}^1/_2$ atmosphères effectives (1), la force théorique est de 11,3 chevaux dont les ${}^6/_8$ sont appliqués à l'appareil de ventilation. Des 4,23 chevaux non utilisés la résistance du piston et des accessoires en emploie 1,84, lorsque la machine n'est pas chargée, et le frottement des poulies et des chaines 0,57.

Une machine modifiée comme je l'ai indiqué, exigerait pour le même résultat un travail de 4,5 chevaux :

(1) L'expérience a constaté que la pression de la vapeur dans le cylindre différait très peu de celle qui a lieu dans la chaudière, et qu'elle se maintenait constante pendant toute la course du piston.

Effet utile (82 pour %)	chev.	3,711
Pertes d'air.		0,323
Résistance des clapets		0,455
	Total.	4,489

Ce qui supposerait une force théorique de 7,2 chevaux.

Enfin par ce système, on pourrait obtenir l'effet que réalisait, lors de nos expériences, la machine de l'Espérance avec une force effective de 6 chevaux, ou une force théorique de 9,45 chevaux.

Frais d'établissement de l'appareil à cloches.

39. Si dans ce genre d'appareils, les frais d'entretien sont presque nuls et présentent, sous ce rapport, une notable économie, sur les machines à pistons; les frais d'établissement sont d'un autre côté, un peu plus élevés. L'appareil de Marihaye qui peut engendrer un volume de plus de 40^{m^3} a exigé pour sa confection :

		Fonte.		Fer.
2 Cuves doubles en tôle . . .			kil.	4369
32 Clapets avec contrepoids	kil.	221	»	463
2 Cloches en tôle.				2756
32 Clapets avec contrepoids		139		436
Total.		360		8024

à raison de 60 frs. les 100 kil. fer et tôle, et de 15 frs. la fonte, la dépense totale serait de 4868 frs. 40.

Des cuves en bois avec pistons et clapets, comme à l'Espérance, couteraient pour la même capacité au moins 3500 frs.

On voit que la faible différence de prix en faveur des machines à pistons, est loin d'établir une compensation aux frais d'entretien qu'elles nécessitent.

Ventilateurs.

40. Tous les ventilateurs employés à l'aérage des mines peuvent se diviser en deux grandes catégories, suivant leur mode d'action sur le fluide qu'ils doivent déplacer :

Ou bien ils impriment à l'air un mouvement centrifuge dans les canaux mobiles dont ils sont formés, ce sont *les ventilateurs à force centrifuge ;*

Ou bien les canaux mobiles éprouvent un mouvement de translation en vertu duquel le fluide glisse sur les cloisons de l'appareil,

sans s'éloigner de l'axe : nous les appellerons : *ventilateurs à mouvement circulaire de translation*.

Théorie des appareils à force centrifuge.

41. Pour nous rendre compte du mode d'action de ce genre d'appareils, considérons un vase cylindrique (planche II, fig. 5) mu circulairement autour de l'axe vertical AB et contenant une certaine quantité de liquide. Supposons que le mouvement du vase soit communiqué au fluide ou par l'effet du frottement ou par le moyen de cloisons attachées à l'axe, et que ce mouvement soit uniforme.

On sait que dans ce cas le liquide se déprime près de l'axe pour s'élever contre les parois du vase de manière à ce que la surface affecte la forme d'un paraboloïde de révolution.

Nommons :

w La vitesse de rotation des points situés à l'unité de distance de l'axe, ou la vitesse angulaire;

r Le rayon intérieur du vase ;

h La hauteur ND de l'intersection de la suface du liquide avec les parois du vase au-dessus du point A où cette surface coupe l'axe AB.

La Mécanique nous apprend que dans ces conditions

$$h = \frac{w^2 r^2}{2g}.$$

Le point N de la surface est donc pressé par une hauteur h de liquide : Il en résulte que si l'on pratique en ce point une petite ouverture, le liquide prendra dans cette ouverture une vitesse donnée par la relation

$$u = \sqrt{2gh} = wr$$

égale par conséquent à la vitesse de rotation.

Si, au lieu de n'éprouver aucune pression à l'extérieur, l'orifice de sortie est baigné par un liquide de même densité que celui du vase, et dont la hauteur au-dessus de cet orifice soit égale à KN=H, la vitesse d'écoulement au lieu d'être égale à $\sqrt{2gh}$ sera donnée par l'expression

$$u = \sqrt{2g(h-H)} = \sqrt{w^2 r^2 - 2gH}. \quad (a)$$

Cette vitesse sera encore diminuée, si le liquide, au lieu de

s'échapper librement par l'orifice, doit traverser des conduits, et s'il éprouve des perturbations dans son mouvement, comme des chocs, des contractions, etc. En représentant par h' la pression nécessaire pour vaincre ces diverses résistances, la vitesse de sortie deviendra

$$u=\sqrt{2g(h-H-h')}, \quad \text{ou}$$
$$u^2=w^2r^2-2gH-2gh' \quad \ldots\ldots \quad (b).$$

Si de ces quatre termes, trois nous sont donnés par l'expérience, nous pourrons déterminer l'autre par le calcul.

Outre les résistances dans l'intérieur de l'appareil, le fluide en mouvement emporte avec lui une certaine quantité de force motrice : si nous supposons que l'orifice soit dans la direction du rayon, comme le liquide participe au mouvement de l'appareil et se meut circulairement avec la vitesse wr, il s'échappera avec une vitesse absolue, qui sera la résultante de celle-ci et de la vitesse u dans l'orifice, ou qui sera égale à

$$\sqrt{w^2r^2+u^2}$$

représentant une hauteur motrice

$$h''=\frac{w^2r^2+u^2}{2g} \quad \ldots\ldots \quad (c).$$

Si l'orifice est dirigé suivant la tangente et en sens inverse du mouvement de rotation, la vitesse absolue d'écoulement sera égale à

$$wr-u \quad \ldots\ldots \quad (c').$$

Enfin cette vitesse sera égale à

$$\sqrt{w^2r^2+u^2-2uwr\cos a} \quad \ldots\ldots \quad (c'').$$

Si a représente l'angle que forme la direction de l'orifice avec la tangente à la circonférence, du côté opposé au mouvement de rotation.

Calcul de l'effet des ventilateurs à force centrifuge.

42. Ces bases posées, nous allons voir comment les ventilateurs rentrent dans cette théorie.

D'abord les faibles différences de pression que l'on observe dans les machines d'aérage, nous permettent d'attribuer à l'air les conditions de mouvement des fluides incompressibles.

Les ventilateurs aspirans ont tous pour but de faire passer dans l'atmosphère de l'air qui se trouve dans une capacité où la pression est moindre. Il en résulte que dans tous les ventilateurs les orifices de sortie sont soumis à un certain excès de pression, qui mesuré en colonne d'air représente la hauteur KN ou H de l'hypothèse précédente. Cette hauteur H mesure la dépression opérée par l'appareil ; elle est par conséquent proportionnelle à l'effet utile.

Ayant jaugé le volume d'air aspiré, par l'un des trois moyens indiqués § 7, et la section des canaux mobiles nous étant donnée, nous connaitrons u, ou la vitesse relative de l'air dans ces canaux. La vitesse angulaire est aussi connue ; dès lors nous pourrons déterminer facilement h' ou l'effet des résistances dans l'intérieur de l'appareil, puisque l'équation (b) nous donne

$$h'=\frac{w^2r^2-u^2}{2g}-\text{H}.$$

Enfin connaissant u et wr, on calculera facilement h'', ou la hauteur perdue par la vitesse absolue de l'air sortant, par l'une des trois formules (c), (c'), (c'').

Nous aurons ainsi tous les éléments nécessaires pour déterminer le rapport de l'effet utile du ventilateur, à la force totale employée pour produire le mouvement de l'air, abstraction faite du frottement des pièces mécaniques et du frottement de l'air extérieur sur les disques tournants.

L'effet utile étant proportionnel à H et l'effort total à $\text{H}+h'+h''$, on aura pour le rapport de ces deux quantités

$$\text{E}=\frac{\text{H}}{\text{H}+h'+h''} \quad \ldots\ldots (d).$$

On pourrait objecter qu'il existe une différence entre les ventilateurs et le cylindre tournant que nous avons considéré, en ce que, dans les ventilateurs, les canaux occupent seulement une couronne plus ou moins large vers le contour extérieur : Mais, si l'on remarque que les particules fluides, à leur entrée dans les canaux mobiles participent immédiatement au mouvement de rotation, de manière, que si elles sont d'abord animées dans la direction du rayon de la vitesse v', et que r' soit le rayon de la circonférence intérieure du ventilateur, elles acquerront la vitesse $\sqrt{w^2r'^2+v'^2}$; on concevra, que pour les appareils que nous aurons

à examiner, la théorie reste la même quelle que soit la distance à l'axe de l'origine des canaux. M. Combes, dans le supplément au Traité de l'aérage, tome XVIII des Annales des Mines, est arrivé aux mêmes résultats que ci-dessus, par une voie différente : En supposant que l'air entre sans choc dans les canaux mobiles et en négligeant les résistances, il trouve (page 612) pour l'expression de la vitesse, l'équation (a) ou

$$u^2 = w^2 r^2 - 2gH\,;$$

et en tenant compte des résistances, il trouve (page 621) une relation identique avec l'équation (b).

43. Deux espèces différentes de ventilateurs à force centrifuge ont été établies en Belgique : les ventilateurs à ailes courbes de M. Combes, dont la description et la théorie se trouvent exposées dans son Traité de l'aérage, et les ventilateurs ordinaires à force centrifuge et à ailes planes, avec de légères modifications dues à M. Letoret.

N'ayant pas été à même de faire des expériences sur ces appareils, je prendrai pour base de mes calculs celles que nous devons à la sollicitude éclairée de M. Rainbeaux, chef de l'établissement du Grand Hornu, près de Mons, et qui ont été confiées aux soins de M. Glépin, directeur du charbonnage de cet établissement. Ces expériences se trouvent décrites dans le Bulletin du Musée de l'Industrie, année 1843.

Ventilateur de M. Combes.

44. Un ventilateur de ce système, construit avec les plus grands soins et toutes les modifications dont la pratique a fait reconnaître l'utilité, se trouve établi à l'une des mines du Grand Hornu. Il est formé de trois ailes, qui sont tangentes à la circonférence extérieure et forment un angle de 6°39′ avec la tangente à la circonférence intérieure. Les rayons de ces circonférences sont de $0^m,85$ et de $0^m,68$. La section totale des canaux est de $0^{m2},1695$ et leur hauteur est à l'entrée de $0^m,34$ et à la sortie de $0^m,355$.

Ce ventilateur se trouve décrit pages 81 et suivantes du Bulletin, et les expériences dont il a été l'objet sont rapportées pages 86, 87, 297 et 298.

Vitesse absolue de l'air sortant.

45. Cette vitesse nous sera donnée par l'expression $wr-u$; il suffit donc pour chaque expérience de calculer la vitesse de l'extrémité des ailes et d'en retrancher la vitesse de l'air dans les canaux. Le tableau suivant présente le résultat de ces calculs et l'indication de la hauteur perdue $h''=\frac{(wr-u)^2}{2g}$ à côté de la hauteur utile H.

NUMÉRO DES EXPERIENCES.	1re.	2e	3e	4e	5e
Vitesse angulaire.	48m, 9	51m,4	56m, 748	43m,227	53m,5
Volume aspiré.	2m3,413	2m3,532	2m3,851	3m3,694	4m3,567
Vitesse (wr) de l'extrémité des ailes.	41m,565	43m,69	48m,238	36m,74	45m,475
Vitesse relative (u).	14, 236	14, 94	16, 82	21, 8	26, 9
Vitesse de l'air sortant.	27, 329	28, 75	31, 415	14, 94	18, 575
Hauteur perdue Ch'' en air.	38,	42, 12	50, 27	11, 35	17, 4
« en eau.	0, 046	0, 05	0, 059	0, 014	0, 021
Hauteur utile (H) en air.	25, 64	25, 27	31, 9	0, 67	17, 035
« en eau.	0, 031	0, 03	0, 038	0, 013	0, 021

On voit d'après ces calculs que pour des dépressions qui varient de 0m,03 à 0m,04 d'eau, la vitesse perdue est de 27m à 31m et absorbe un travail moteur supérieur à 1,5 fois le travail utile, tandis que dans la machine de Marihaye, malgré l'état défectueux dans lequel elle se trouve, la vitesse perdue ne dépasse pas 23m, correspondant à une colonne d'eau de 0m,033. Pour des dépressions plus faibles, la perte est encore supérieure au travail, et cette perte serait probablement énorme pour des volumes et des dépressions considérables. Admettons par exemple, que dans le ventilateur calculé par M. Combes pour faire l'effet de la machine de l'Espérance (pages 611 et suivantes du supplément au Traité de l'aérage),

la vitesse angulaire nécessaire soit 1,5 fois la vitesse théorique, comme dans les trois premières expériences du tableau, nous trouverons pour la vitesse absolue de l'air 47^m,53 correspondant à une hauteur génératrice de 115^m,25 d'air ou 0^m,14 d'eau. Dans la machine de l'Espérance, la hauteur perdue est de 0^m,1063 d'eau.

Le but que l'on avait eu en vue en substituant les ventilateurs à aîles courbes aux machines à soupapes est donc loin d'avoir été atteint, et ce sont ces dernières qui présentent incomparablement les meilleures conditions sous le rapport de la vitesse absolue de l'air sortant, surtout lorsque l'aspiration a lieu sous des dépressions un peu élevées.

Effet de la résistance de l'air dans les ventilateurs à aîles courbes.

46. Il existe dans les ventilateurs d'autres causes encore d'absorption de travail moteur qui ne se rencontrent pas dans les machines à soupapes : Ce sont les frottements des fluides aspirés et les perturbations qu'ils éprouvent dans leur mouvement.

La nécessité d'imprimer à ces appareils une vitesse angulaire beaucoup plus considérable que celle qu'indique la théorie, démontre que l'effet des résistances est bien supérieur à celui que donne le calcul par les principes ordinaires de la Mécanique. Il suffit, pour le prouver à l'évidence, de mettre dans l'équation (b) les données de l'expérience.

Comme $\frac{1}{2g}=0,051$, on aura pour l'expression de la hauteur absorbée par les résistances, l'expression

$$h'=0,051(w^2r^2-u^2)-H.$$

Et en faisant le calcul pour chaque expérience, on dressera le tableau suivant :

EXPÉRIENCES.	1re	2e	3e	4e	5e
$0,051(w^2r^2-u^2)$	77^m,87	91^m,06	104^m,20	44^{m}60	68^m,52
H	25, 64	25, 27	31, 90	10, 67	17, 04
h'	52, 23	65, 79	72, 30	33, 93	51, 48

On voit d'après ces calculs que les résistances occasionnent une perte de travail moteur, supérieure à deux et trois fois l'effet utile, suivant que les dépressions sont plus ou moins élevées.

Effet utile des ventilateurs Combes.

47. Les deux tableaux précédents nous donnent pour chacune des expériences la valeur de h' et de h'' : H est d'ailleurs connu. Il en résulte que pour obtenir l'effet utile, sans tenir compte des résistances des pièces mécaniques, il suffit de substituer les valeurs trouvées dans l'expression (*d*) ou

$$E = \frac{H}{H + h' + h''} \ldots (1)$$

On dressera ainsi le tableau suivant :

EXPÉRIENCES.	1re	2e	3e	4e	5e
H	25m,64	25m,27	31m,90	10m,67	17m,04
h'	52, 23	65, 79	72, 30	33, 93	51, 48
h''	38, 00	42, 12	50, 27	11, 35	17, 40
$H+h'+h''$	115, 87	133, 18	154, 47	55, 95	85, 92
Effet utile (E)	0, 221	0, 197	0, 206	0, 19	0, 20
Effet en chevaux.	ch 1, 00	1, 01	1, 44	0, 64	1, 27

On voit que les résultats de ces expériences concordent parfaitement, et que l'effet utile n'est que les 0,20 du travail moteur nécessaire pour imprimer le mouvement à l'air. En ajoutant à ce

(1) Si l'on ne tenait pas à déterminer isolément les diverses causes de perte de travail moteur, on arriverait plus simplement à ce résultat en substituant à h' et à h'' leurs valeurs tirées des équations (*b*) et (*c'*), on aurait ainsi pour l'expression de l'effet utile

$$E = \frac{H}{\frac{2w^2r^2 - 2uwr}{2g}} = \frac{H}{0,102wr(wr-u)}.$$

travail celui des résistances passives, telles que le frottement de l'axe du ventilateur, la raideur des courroies et le frottement de l'air extérieur sur les disques, l'effet utile n'atteindrait probablement pas 15 p. °/₀ de la force transmise par la machine.

Ce résultat n'étonnera pas, si l'on remarque que les conditions théoriques d'après lesquelles l'appareil a été établi ne se réalisent nullement.

Ainsi, au lieu que l'air entre sans choc dans les canaux et se meuve ensuite suivant le rayon, par l'effet de la vitesse relative u dans les canaux combinée avec la vitesse de rotation, cet air d'après les données de la première expérience, la seule pour laquelle j'aie effectué le calcul, serait frappé par l'origine des aîles du ventilateur et entraîné avec une vitesse absolue considérable dans une direction qui ferait un angle de 4° 52′ seulement avec celle du mouvement de rotation (1).

Ajoutons toutefois que ce ventilateur ne s'est pas probablement trouvé dans les conditions qui correspondent au maximum d'effet utile qu'il peut réaliser. Mais dans tous les cas, il est certain que les résultats qu'il fournirait ne seraient jamais très favorables, parce que le surcroit de résistance que produit la forme des canaux entraine non-seulement une grande perte de travail moteur ; mais il en résulte que la vitesse du courant d'air dans l'appareil est toujours fort inférieure à la vitesse de rotation, et que l'avantage d'opposer ces deux vitesses est largement compensé par la plus grande différence qui existe entr'elles. Cet effet prévu avec beaucoup de sagacité par M. Péclet, dans son Traité de la chaleur, sera mis hors de doute par nos calculs des expériences faites sur les ventilateurs ordinaires à force centrifuge.

On remarquera d'ailleurs que le rapport de la perte produite par la vitesse absolue de l'air sortant à l'effet utile augmente avec

---

(1) En nommant v' la vitesse absolue de l'air entrant dans les canaux, r_0 le rayon de la circonférence intérieure du ventilateur, et sachant que l'angle que l'orifice des ailes fait avec la tangente à cette circonférence est de 6° 39′, on aura pour la valeur de v'

$$v'=\sqrt{w^2r^2+u^2-2wru\cos 6°\,39'}=19^m,2$$

en désignant par δ l'angle que forment les deux vitesses v' et wr_0 on a la relation :

$$u^2=w^2r_0^2+v'^2-2wr_0\,v'\cos\delta$$

d'où l'on tire $\delta=4°\,52'$.

la dépression dans les galeries d'appel, mais que par compensation le rapport de la perte due aux résistances à l'effet obtenu croit lorsque la dépression diminue. C'est ce qui explique le peu de variation de l'effet utile théorique dans les expériences précédentes.

M. Glépin en mesurant à l'aide du frein la force appliquée au ventilateur a trouvé pour les trois premières expériences un effet utile de 39, 36 et 38 p. °/₀. Pour les deux dernières, cet effet n'est plus que de 25 et 27 °/₀. D'après les calculs qui précèdent, j'ai lieu de croire que M. Glépin s'est trompé dans l'évaluation du travail moteur, et qu'un examen plus attentif l'eut conduit à d'autres résultats.

Ventilateurs à aîles planes.

48. Depuis longtemps déjà on emploie en Allemagne et en Belgique les ventilateurs ordinaires à force centrifuge pour l'aérage de certaines parties de mines où une ventilation plus active est momentanément nécessaire. M. Letoret est je pense le premier, qui vers 1841, les ait appliqués à l'aérage d'une grande exploitation et on lui doit une disposition particulière de ces appareils, qui en facilite l'usage. Elle consiste à établir le ventilateur entre deux canaux en maçonnerie, qui en forment les joues et qui communiquent avec la mine (planche II, fig. 6). L'axe du ventilateur est horizontal et chacun des canaux est percé autour de cet axe, d'une ouverture, dont le diamètre est moindre que celui du ventilateur.

L'espace compris entre les deux canaux est entièrement ouvert, et l'air aspiré est rejeté dans l'atmosphère par l'intervalle qui les sépare. Pour éviter l'effet nuisible de la rencontre des courants qui arrivent par deux directions opposées un diaphragme lenticulaire en tôle, formé par la réunion de deux cones très évasés, se trouve établi au centre du ventilateur.

M. Letoret a en outre fait subir à ces ventilateurs une modification dont l'avantage est plus problématique, en articulant les aîles planes de manière qu'on puisse leur donner une inclinaison plus ou moins grande sur la direction du mouvement de rotation.

Effet utile des ventilateurs à aîles planes.
(Système de M. Letoret).

49. Lorsque les aîles sont dans la direction du rayon, on a pour

l'expression de la vitesse absolue de l'air sortant $\sqrt{w^2r^2+u^2}$ et pour la hauteur perdue la relation (*c*) § 41

$$h''=\frac{w^2r^2+u^2}{2g}$$

Dans les ventilateurs du système de M. Letoret, les ailes sont inclinées sur le rayon ; mais comme la vitesse u est toujours très-faible, nous pourrons sans erreur sensible adopter l'expression précédente pour représenter la vitesse perdue.

On a d'un autre côté pour déterminer les résistances de l'air dans l'intérieur de l'appareil l'équation (*b*) § 41, ou

$$h'=\frac{w^2r^2-u^2}{2g}-\mathrm{H}$$

En ajoutant ces deux équations, on trouve

$$\mathrm{H}+h'+h''=2\frac{w^2r^2}{2g}=2\cdot 0{,}051\, w^2r^2$$

Et par suite pour l'expression de l'effet utile théorique

$$\mathrm{E}=\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}+h'+h''}=\frac{\mathrm{H}}{2\cdot 0.051\, w^2r^2}$$

D'après ces principes calculons le résultat des expériences faites par M. Glépin sur différents ventilateurs.

Ventilateur du charbonnage de Ste-Victoire, près de Mons.

Ce ventilateur établi comme nous l'avons indiqué ci-dessus présente les dimensions suivantes. (Mémoire de M. Glépin, page 76).

Longueur des ailes.	0m,77
Largeur dans le sens parallèle à l'axe.	0m,93
Longueur des bras à l'extrémité desquels se trouvent articulés les montants qui supportent les ailes. . .	0m,80
Longueur de ces montants.	0m,90
Nombre d'ailes.	4
Diamètre des ouvertures par lesquelles l'air de la mine arrive au ventilateur.	1m,60

J'ai pris parmi les expériences rapportées page 77 les deux dernières où l'on avait mesuré directement la force appliquée.

Dans une de ces expériences, le ventilateur débitait 2m3,939 sous une pression de 12m,49 d'air ou de 0m,0152 d'eau.

Le nombre de révolutions était de 113 par minute et l'angle formé par les bras et par les aîles du ventilateur était de 135°. L'effet utile réalisé était de $0^{ch},6$.

D'après ces données, on arrive aux résultats suivants :

Le rayon extérieur du ventilateur est égal à

$$\sqrt{(0,80)^2+(0,90)^2-2\cdot 0,8\cdot 0,9 \cos 135^\circ}=1^m,571.$$

La vitesse angulaire $w=11^m,833$

d'où $0,051 w^2 r^2=17^m,617$

et $$E=\frac{12,49}{2\cdot 17,617}=0,35$$

La section des canaux étant supérieure à $4^{m^2},5$, on voit que la vitesse u est inférieure à $\frac{2,939}{4,5}$, ou à $0^m,66$, et que par suite $h''=\frac{w^2r^2+u^2}{2g}$ ainsi que $H+h'=\frac{w^2r^2-u^2}{2g}$ diffèrent très-peu de $\frac{w^2r^2}{2g}$. On peut donc sans erreur sensible prendre pour la hauteur perdue par la vitesse de l'air sortant l'expression $\frac{w^2r^2}{2g}$ $=17^m,617$ et pour la hauteur absorbée par les résistances

$$\frac{w^2r^2}{2g}-H=17^m,617-12^m,49=5^m,127.$$

Dans l'expérience suivante, le ventilateur aspirait $3^{m^3},01$ par seconde sous une pression de $15^m,45$ d'air ou de $0^m,0188$ d'eau, et réalisait ainsi un effet utile de $0^{ch},754$. Le nombre des révolutions était de 137 par minute et l'angle formé par les aîles et les bras qui les supportent de 105°.

D'après les données on trouve que $r=1^m,35$, $w=14^m,348$ et $0,051w^2r^2=19^m,121$; par conséquent $E=\frac{15,45}{2\cdot 19,121}=0,40$.

La pression nécessaire pour mouvoir l'air est ainsi employée :

Effet utile.	$15^m,45$
Résistance de l'air dans l'appareil.	$3^m,671$
Vitesse absolue.	$19^m,121$
Total	$38^m,242$

Pour obtenir l'effet utile pratique, il faudrait ajouter à cet effort le frottement de l'axe, la résistance des courroies et les vibrations des diverses parties du ventilateur. Pour un travail utile de $0^{ch},6$

à $0^{ch},754$, comme dans les expériences précédentes, qui correspond à une force théorique, nécessaire pour mouvoir l'air de $1^{ch},71$ et $1^{ch},88$, on pourrait admettre que le travail absorbé par les résistances inhérentes au mouvement de la machine est égal au travail théorique.

On aurait alors pour l'effet utile pratique la moitié des nombres trouvés plus haut ou 17, 5 et 20 p. %.

M. Glépin en mesurant à l'aide du frein le travail moteur transmis par la machine, a trouvé 16 et 18 p. %.

Ventilateur du charbonnage de l'Agrappe et Grisœil.

Les dimensions de cet appareil diffèrent peu de celles du ventilateur précédent. Dans une expérience (mémoire de M. Glépin, page 78) il débitait $3^{m^3},948$ par seconde sous une pression de $16^m,25$ d'air ou de $0^m,02$ d'eau et réalisait un travail utile de $1^{ch},05$. Le nombre de révolutions était de 144 par minute et l'angle formé par les bras avec les aîles de 110°. Dans ces conditions j'évalue à $1^m,35$ le rayon extérieur du ventilateur.

On obtient d'après ces données

$$0,051 w^2 r^2 = 21^m,125$$

$$E = \frac{16,25}{2 \cdot 21,125} = 0,38.$$

En réduisant cet effet de moitié pour tenir compte des résistances passives de la machine on a pour l'effet utile pratique 19 p. %.

M. Glépin a trouvé 20 p. %.

Ventilateur du charbonnage de Marcinelles.

Ce ventilateur décrit page 304 du Bulletin de l'année 1843, est composé de 8 aîles en tôles, fixées à des rayons en fonte, et courbées à leurs extrémités suivant des portions de surface cylindrique.

Le rayon de la circonférence extérieure est de. . $1^m,023$

Celui de la circonférence intérieure et des ouvertures centrales de. . . . . $0^m,315$

La largeur des aîles est de. . . . . $0^m,60$

L'espace libre laissé entre les joues et les tranches latérales des aîles de. . . . . $0^m,025$

Ce ventilateur aspirait $2^{m^3},91$ par seconde sous une pression de $8^m,6$ d'air ou de $0^m,01$ d'eau et réalisait un travail utile de $0^{ch},387$ en faisant 246 tours par minute.

De ces données on déduit $0{,}051 w^2 r^2 = 35^m,322$

et $$E = \frac{8{,}6}{2 \cdot 35{,}322} = 0{,}12.$$

M. Glépin a trouvé pour l'effet utile pratique 10 p. %.

Ce faible résultat est évidemment dû à la disposition défectueuse de l'appareil, dont l'un des vices principaux est l'étendue des aîles, comparée à la faible section des ouvertures par lesquelles arrive l'air de la mine. L'air doit se mouvoir dans ces ouvertures avec une vitesse de 8 à 9^m, et outre la perte due à la hauteur génératrice de cette vitesse, il doit se produire des perturbations très–nuisibles.

Le tableau suivant présente le résumé des quatre expériences rapportées ci–dessus :

EXPERIENCES.	1re	2e	3e	4e
Volume aspiré	$2^{m^3},939$	$3^{m^3},01$	$3^{m^3},948$	$2^{m^3},91$
Valeur de H	$12^m,49$	$15^m,45$	$16^m,25$	$8^m,6$
» » h'	$5^m,127$	5, 671	4, 875	26, 722
» » h''	17, 617	19, 121	21, 125	35, 322
Effet utile théorique	0, 35	0, 40	0, 38	0, 12
» » pratique	0, 16	0, 18	0, 20	0, 10
» en chevaux	ch 0, 6	ch 0, 754	ch 1, 05	ch 0, 387

D'après ce tableau on voit, qu'à l'exception de la dernière expérience, la vitesse absolue de l'air sortant dans les ventilateurs à aîles planes n'est pas plus grande qne dans les ventilateurs à aîles courbes, tandis que les résistances dans l'intérieur de l'appareil sont beaucoup moindres.

D'un autre côté la vitesse relative u étant très-faible et inférieure à 1^m, on voit que l'inclinaison donnée aux aîles pour annuler une partie de cette vitesse doit être plutôt nuisible qu'utile.

Ventilateurs à mouvement circulaire de translation.

THÉORIE.

50. Dans ces appareils l'aspiration est déterminée par la translation des canaux mobiles au milieu de l'air qu'il s'agit de déplacer. Pour nous faire une idée des phénomènes qui se produisent, nous admettrons en grande partie les principes théoriques que M. Combes a développés dans son supplément au Traité de l'aérage. Considérons un tuyau en mouvement dans la direction de son axe au milieu d'un fluide soumis à une pression constante. Les molécules fluides placés à l'intérieur du tuyau tendront à glisser avec une vitesse égale à celle avec laquelle les parois du tuyau se dérobent sous elles. Si v est la vitesse de translation, théoriquement la vitesse d'écoulement sera égale à v, et sera la même que si le tuyau immobile mettait en communication deux capacités où la différence de pression serait égale à $\frac{v^2}{2g}=h_1$.

Si, lorsque le tuyau est en repos, la pression de l'air au lieu d'être uniforme, est moindre d'une quantité H à l'entrée qu'à la sortie, la vitesse théorique u de l'air, pour une vitesse v de translation sera seulement produite par la hauteur h_1—H ou $\frac{v^2}{2g}$ — H et l'on aura :

$$u=\sqrt{v^2-2gH}$$

Enfin les résistances que l'air éprouvera dans son mouvement rendront cette vitesse moindre encore ; et si nous représentons par h' l'effet de ces résistances la vitesse d'écoulement sera seulement

$$u=\sqrt{v^2-2g(H+h')}=\sqrt{2g(h_1-H-h')}.$$

d'un autre côté l'air possédant une vitesse égale à u et le tuyau une vitesse égale à v, l'air sortira avec une vitesse absolue $v—u$; représentant une hauteur perdue

$$h''=\frac{(v-u)^2}{2g}$$

cette perte sera d'autant plus grande pour une vitesse donnée de l'air, que la dépression utile H sera elle-même plus grande et cette perte ne pourra jamais être anéantie.

D'après ces diverses relations, l'effet utile étant proportionnel à

H, l'effort total proportionnel à $H+h'+h''$, le rapport de ces deux quantités ou l'effet utile théorique sera égal à

$$E=\frac{H}{H+h'+h''}=\frac{2g\cdot H}{2v(v-u)}.$$

51. Dans les appareils de ventilation les canaux mobiles sont inclinés sur la direction du mouvement, ce qui exige une modification dans l'expression de la vitesse théorique produite. M. Combes partant du cas particulier, où le plan de l'orifice est perpendiculaire à la direction du mouvement, admet que l'effet de l'inclinaison est nul, et que pour une vitesse de translation donnée, la vitesse d'écoulement est constante quelle que soit l'inclinaison du tuyau. Il applique ensuite ce principe à la théorie de la vis, ou le plan de l'orifice, comme dans tous les autres appareils, est parallèle à la direction du mouvement : on en tirerait la conséquence que même dans ce cas, l'effet ne varie pas pour une même vitesse de translation, que l'axe du tuyau soit perpendiculaire ou parallèle à la direction de cette vitesse, ce qui me paraît inadmissible.

Je pense, au contraire, d'après les principes posés, que la vitesse théorique de l'air est égale à la vitesse avec laquelle la surface sur laquelle il repose tend à se dérober sous lui : si le tuyau fait avec la direction du mouvement un angle a, la vitesse de translation parallèle à l'axe du tuyau sera $v \cos a$ et la hauteur théorique correspondante

$$h_1=\frac{v^2 \cdot \cos^2 a}{2g}.$$

Nous devrons pour obtenir la vitesse réelle de l'air, retrancher comme ci-dessus de cette hauteur la dépression H et l'effet des résistances h', ce qui nous donnera

$$u=\sqrt{v^2\cos^2 a-2g(H+h')}$$

Enfin l'air possédant une vitesse relative u qui fait un angle a avec la direction du mouvement on aura pour l'expression de la vitesse perdue

$$\sqrt{v^2+u^2-2uv\cos a};$$

et

$$h''=\frac{v^2+u^2-2uv\cos a}{2g}.$$

Et l'effet utile théorique sera exprimé par

$$E=\frac{H}{H+h'+h''}=\frac{2gH}{v^2(\cos^2 a+1)-2uv\cdot\cos a}\ (f).$$

Remarquons que la vitesse théorique de l'air étant donnée par la relation

$$u=\sqrt{v^2\cos^2 a-2gH}$$

l'air cesserait d'être aspiré par le tuyau si l'on avait $\frac{v^2\cos^2 a}{2g}=H$. Dans ce cas, le tuyau ferait l'office d'obturateur en empêchant l'air extérieur de rentrer. Pour qu'il y ait aspiration il faut que la valeur de v dépasse celle qui est donnée par cette équation. Dans le cas où H serait plus grand que $\frac{v^2\cos_2 a}{2g}$, l'air extérieur rentrerait dans la capacité où existe la dépression H.

On peut voir aussi que pour un effet donné, le mouvement de translation devra être d'autant plus rapide que cos a aura une valeur plus petite. Il en résultera que u sera non-seulement moindre par rapport à v, ce qui contribuera à augmenter la vitesse absolue de l'air sortant, mais aussi qu'au lieu d'être opposées, les deux vitesses u et v formeront entre elles un angle et que leur résultante sera d'autant plus grande que cet angle sera lui-même plus petit, ou que a sera plus grand.

Il convient donc de rendre l'angle a aussi petit que le permet la bonne disposition de l'appareil.

52. Parmi les divers ventilateurs à mouvement de translation, j'examinerai seulement les trois suivants :

1° La vis pneumatique de M. Motte ;

2° Le ventilateur à aîles plano-coniques que je propose d'employer ;

3° Le ventilateur à aîles de moulin dont l'idée est due à M. Lesoinne, professeur de métallurgie à l'université de Liége.

Vis pneumatiques.

Théorie.

53. Les vis pneumatiques peuvent être considérées comme formées par une suite de canaux hélicoïdes, dont l'inclinaison sur la direction du mouvement varie avec la distance à l'axe.

Nommons w la vitesse angulaire du mouvement de rotation, p le pas de la vis et r un rayon quelconque, la longueur de l'hélice correspondante sera l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont $2\pi r$ serait la base et p la hauteur, égale par conséquent à $\sqrt{4\pi^2 r^2+p^2}$. L'in-

clinaison de l'hélice sur la base ou sur la direction du mouvement sera donnée par la relation

$$\cos a = \frac{2\pi r}{\sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}}$$

et comme wr est la vitesse de translation, on aura pour la vitesse relative théorique

$$u = \sqrt{w^2 r^2 \cos^2 a - 2gH} = \sqrt{\frac{4\pi^2 w^2 r^4}{4\pi^2 r^2 + p^2} - 2gH} \quad (1)$$

La section du canal hélicoïde, compris entre deux surfaces cylindriques consécutives, de rayons r et $r + dr$ sera égale à la surface annulaire $2\pi r dr$, multipliée par le sinus de l'angle que forment les hélices avec cette surface, soit $2\pi r dr \sin a$: ou bien, cette section est égale à la projection sur un plan perpendiculaire à l'hélice, de la surface rectangulaire qui sépare les génératrices des deux cylindres situées sur le même rayon. Soit

$$pdr \cos a = \frac{2\pi r dr p}{\sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}}$$

Par conséquent l'on aura pour l'équation différentielle du volume aspiré

$$\frac{2\pi r dr \cdot p}{\sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}} \sqrt{\frac{4\pi^2 w^2 r^4}{4\pi^2 r^2 + p^2} - 2gH} ;$$

mais dans les applications pratiques, nous pourrons, sans trop grande erreur, prendre à l'exemple de M. Combes, au lieu d'un rayon variable, le rayon de l'hélice moyenne ; et en nommant r_0 et r_1 les rayons du noyau et de l'enveloppe et r le rayon moyen $\frac{r_0 + r_1}{2}$ on aura pour la section du canal

$$\frac{h(r - r_0) 2\pi r}{\sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}}$$

La vitesse relative u sera exprimée comme ci-dessus. Une conséquence importante de la théorie précédente, que M. Combes a développée dans le supplément au traité de l'aérage, c'est que le noyau doit avoir un diamètre tel, que la vitesse imprimée à la

---

(1) M. Combes en supposant nulle l'influence de l'inclinaison des canaux trouve pour cette vitesse $u = \sqrt{w^2 r^2 - 2gH}$

première hélice soit au moins égale à $\sqrt{2gH}$, autrement il s'établit deux courants en sens inverse, l'un près du noyau, l'autre près de l'enveloppe. Le plus petit rayon doit donc être égal ou supérieur à celui que donne la relation

$$\sqrt{\frac{4\pi^2 w^2 r^4}{4\pi^2 r^2+p^2}-2gH}=0$$

ou

$$\frac{4\pi^2 w^2 r^4}{4\pi^2 r^2+p^2}=2gH. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

équation du quatrième degré facile à résoudre.

Aucune des vis établies en Belgique ne satisfait à cette condition; mais le calcul des expériences faites sur ces appareils nous prouvera que l'effet d'un trop faible noyau, quoique nuisible, l'est moins que ne le ferait supposer la théorie précédente.

Effet utile des vis pneumatiques, actuellement en activité.

54. Les vis ne se trouvant pas dans des conditions théoriques convenables, les expériences dont elles ont été l'objet, tout en nous fournissant des indications utiles, ne pourront toutefois nous donner des résultats bien positifs.

Vis pneumatique du charbonnage de Sauwartan sur Dour.

55. L'appareil se compose de deux cloisons hélicoïdes, construites chacune sur un demi pas de vis de $0^m,73$. Le diamètre de l'axe est de $0^m,046$, le diamètre de la vis de $1^m,40$, et celui du cylindre enveloppe de $1^m,406$. (Mémoire de M. Glépin, page 279 du Bulletin du Musée de l'Industrie, année 1842).

Dans une expérience, la vis débitait $3^{m^3},908$ d'air par seconde, sous un excès de pression de l'air extérieur de $16^m,87$ d'air, ou de $0^m,0216$ d'eau : Le nombre de révolutions était de 450 par minute.

D'après ces données, $w=47^m,123$; les angles des hélices extrêmes avec le plan du mouvement sont de $84°,21'$ et de $18°,22'$; le rayon *de partage* ou celui où l'impulsion de la vis fait équilibre à la pression extérieure, calculé d'après l'équation (g) est égal à $0^m,437$ auquel correspond un angle d'inclinaison de l'hélice de 28°.

Si on considère, comme seule efficace pour l'aspiration, la partie de la vis qui est au-delà de ce rayon, cette partie aura une largeur dans le sens du rayon de $0^m,70-0^m,437=0^m,263$ et le rayon

moyen de cette partie sera de $0^m,565$, auquel correspond un angle d'inclinaison de l'hélice, $a=22°,13'53''$. La section de la partie utile de la vis sera égale à p cos a. $0^m,263=1^m,3517 \cdot 0,263 = 0^{m^2},3555$.

La vitesse théorique correspondante serait de $u=\sqrt{w^2r^2\cos^2a - 2gH} = 17^m$ et le volume théorique serait de $6^{m^3},0435$.

En divisant le volume extrait par la section utile on aurait

$$u=\frac{3,908}{0,3555}=11^m$$

et en faisant abstraction de l'effet de la section nuisible, on aurait pour l'effet utile théorique (f)

$$E=\frac{2gH}{w^2r^2(\cos^2a+1)-2uwr\cos a}=\frac{331}{615,2\cdot 717,7-22\cdot 241,83}$$
$=0,373$.

Mais ce résultat ne représente pas l'état réel des choses, parce qu'il doit s'établir près de l'axe un courant d'air, qui est ensuite aspiré vers la circonférence, de sorte que le volume réellement débité par la section utile de la vis nous est inconnu.

La théorie indique que toute la partie de la vis, comprise dans la circonférence de $0^m,437$ de rayon, ne doit pas produire d'aspiration, mais doit au contraire laisser pénétrer l'air extérieur dans les conduits d'appel.

Mais l'expérience prouve que le courant rentrant est moindre que ne l'exprime le calcul théorique.

Le rayon de l'axe étant de $0^m,023$, la largeur de la partie nuisible serait de $0^m,437-0^m,023=0^m,414$ et son rayon moyen de $0^m,23$.

L'angle de l'hélice correspondant à ce rayon serait de $45°,17'34''$ et la hauteur de la section de $1^m,027$. La section de la partie nuisible serait donc très-approximativement de $0^m,425$ et l'air extérieur tendant à rentrer avec la vitesse

$$u=\sqrt{2gH-w^2r^2\cos^2a}=16^m,5.$$

le volume rentrant serait de $7^{m^3},012$ et comme le volume théorique aspiré est seulement de $6^{m^3},04$ on voit que ces résultats sont en contradiction avec les données de l'expérience.

Il faut donc nécessairement que le mouvement imprimé à l'air dans la section qui est au-delà du rayon de partage, secondé par la pression qu'exerce dans cette direction la force centrifuge, ait

pour effet d'entraîner une certaine quantité d'air de la partie nuisible, et de rendre ainsi le courant rentrant bien moindre que ne l'indique la théorie.

Dans l'impossibilité de déterminer à quel point s'arrête la section utile, on voit que nos calculs fondés sur la supposition que les effets de la section nuisible théorique se neutralisent, sont entièrement hypothétiques ; mais d'un autre côté la méthode que nous avons employée s'appliquerait facilement au cas où la vis serait disposée de manière à ce que toute la section agît efficacement pour produire l'aspiration.

M. Glépin avait évalué l'effet utile de cette vis à 33 p. °/₀, en répétant l'expérience avec le frein il a trouvé de 24 à 26 p. °/₀. Nous avons trouvé pour l'effet utile théorique 37 p. °/₀, et il est permis de supposer que s'il n'y avait pas aspiration de l'air extérieur, cet effet utile serait supérieur à 40 p. °/₀.

Les molécules fluides animées de la vitesse relative u sur les cloisons et emportées dans le mouvement de rotation avec une vitesse wr, décrivent dans l'espace des hélices, inclinées en sens inverse de celles des cloisons. Si la vitesse relative le long de l'enveloppe était égale à la vitesse théorique, l'hélice décrite par le mouvement de l'air sur cette enveloppe, ferait un angle de 45°, avec le plan perpendiculaire à l'axe.

Vis de Monceau Fontaine (près de Charleroy).

56. Cette vis de 0m,80 de diamètre se compose de deux cloisons hélicoïdes dont le demi pas est égal au rayon, et qui sont fixées sur un axe en fer de 0m,029 de diamètre.

Des expériences ont été faites sur cet appareil par M. Gonot et M. Glépin. Les premières se trouvent rapportées pages 226 et 227 du tome 1er des Annales des travaux publics, les secondes, page 281 du Bulletin de l'année 1843.

Ces expériences conduisent aux résultats suivants :

EXPERIENCES.	N° 1.	N° 2.
Volume aspiré	1m3,79	2m3,152
Dépression en air	5m,25	5m,04
« en eau	0, 0065	0, 0063
Nombre de tours par 1'	600,	750,
Vitesse anglaire	62, 83	78, 54
Rayon de partage	0, 193	0, 161

Delà on déduit par des calculs semblables à ceux du § précédent :

EXPERIENCES.	N° 1.		N° 2.	
	Section utile.	Section nuisibl.	Section utile.	Section nuisibl.
Rayon moyen	$0^m,2965$	$0^m,104$	$0^m,2804$	$0^m,0877$
Angle (a) correspondant	23°,14'24"	50°,53'35"	24°,25'18"	55°,34'19"
Vitesse (u) correspondante	$13^m,8$	$8^m,62$	$17^m,41$	$9^m,14$
Largeur (r_1-r_0) de la section	0, 207	0, 178	0, 239	0, 1464
Hauteur (p cos a)	0, 7351	0, 6503	0, 7285	0, 4538
Surface	$0^{m2},1522$	$0^{m2},1157$	$0^{m2},1741$	$0^{m2},0664$
Volume théorique	$2^{m3},10$	1^{m3}	$3^{m3},033$	$0^{m3},607$

Dans les expériences de M. Gonot, le volume extrait est de $1^{m3},79$ tandis que le volume théorique serait seulement de $2^{m3},10 - 1^{m3} = 1^{m3},10$, ce qui nous fait voir qu'il se produit ici un phénomène analogue à celui de l'exemple précédent.

Si on supposait que l'effet de la section nuisible fut nul, la vitesse relative dans la section utile serait de $\frac{1,79}{0,152} = 11^m,77$ et l'on aurait pour l'effet utile théorique calculé d'après l'équation (f) :

$$E = \frac{102,21}{293,02 + 347,5 - 2 \cdot 11,77 \times 17,12} = 0,43.$$

M. Gonot évalue l'effet utile pratique à 0,29, ce qui, vu la grande vitesse de la machine et le faible travail produit, suppose un effet utile théorique encore supérieur au précédent.

Dans les expériences de M. Glépin, le volume aspiré est de $2^{m3},152$ et le volume théorique de $3^{m3},033 - 0^{m3},607 = 2^{m3}426$. On voit qu'ici les résultats de l'observation se rapprochent davantage de ceux de la théorie, ce que l'on doit attribuer à la faible section de la partie nuisible.

Si on admet comme précédemment que l'effet de la section nuisible soit nul, on aura pour la vitesse relative

$u = \frac{2,152}{0,174} = 12^m,36$ et pour l'effet utile théorique E=0,25.

Si l'on suppose d'un autre côté, que la section utile doive extraire

outre le volume donné par l'expérience une quantité égale à $0^{m^3},607$ qui rentre par la section nuisible, alors on aura pour la vitesse relative $u=15^m,85$, et pour l'effet utile théorique de la section efficace 0,39.

L'expérience donne pour l'effet utile pratique 24 à 25 p. °/₀.

Vis du Charbonnage de Trieukaisin.

57. Le diamètre de la vis est de 3^m, le pas de $1^m,40$ et je suppose le diamètre de l'axe de $0^m,08$.

Dans une expérience rapportée page 303 du Bulletin de 1843, la vis faisant 189 tours par minute aspirait un volume de $6^{m^3},458$ en produisant une dépression de $0^m,021$ d'eau ou de $17^m,846$ d'air, à la température et sous la pression de l'expérience.

De ces données on déduit : vitesse angulaire $19^m,79$, rayon de partage 1^m.

	Section utile.	Section nuisible.
Rayon moyen	$1^m,25$	$0^m,52$
Angle (a) correspondant	10°,6′25″	23°,11′43″
Vitesse (u) correspondante	$15^m,58$	$16^m,1$
Largeur de la section	$0^m,50$	0, 96
Hauteur ($p \cos a$)	$1^m,378$	1, 286
Surface	$0^{m^2},689$	$1^{m^2},234$
Volume théorique	$10^{m^3},90$	$19^{m^3},74$

On voit qu'ici les résultats du calcul sont en opposition manifeste avec ceux de l'expérience et que l'air est entraîné avec plus de force que ne le ferait supposer la théorie. Si nous appliquons à ce cas le mode de calcul déjà employé, nous aurons pour la vitesse relative, $u=9^m,37$ et pour l'effet utile théorique

$$E=0,457;$$

l'effet utile pratique a été trouvé de 23 p. °/₀.

Les données des expériences que nous avons soumises au calcul étant insuffisantes pour permettre de comparer, avec quelque certitude, les résultats théoriques obtenus, avec ceux des appareils à force centrifuge, nous devons nous borner à l'appréciation des résultats pratiques.

Dans le ventilateur ordinaire à force centrifuge, qui est plus avantageux que le ventilateur Combes, l'effet utile est d'environ 20 p. °/₀ tandis que dans la vis cet effet varie de 23 à 30 p. °/₀.

Nul doute d'ailleurs, que par une disposition plus convenable on ne puisse obtenir des résultats plus favorables encore.

Avantages de la vis pneumatique comparée aux ventilateurs à force centrifuge.

58. J'attribue en partie la supériorité de la vis, sur les ventilateurs à force centrifuge aux divers degrés de vitesse des canaux mobiles qui dans ces machines doivent exercer une influence favorable.

Dans les ventilateurs, la vitesse de l'origine des canaux mobiles est la même pour tous : lorsque cette vitesse est celle qui correspond au maximum d'effet utile, les résultats doivent être bien plus avantageux, que lorsque cette condition ne se réalise pas. Mais outre que toutes les circonstances du mouvement de l'air, sont trop peu connues, pour qu'on puisse installer ces appareils dans la prévision d'obtenir ce résultat ; les exigences de la ventilation par suite de la température, du travail dans la mine, etc. sont si variables, qu'un ventilateur, fût-il même établi dans les conditions convenables ne pourrait y être maintenu longtemps. D'ailleurs, même dans les circonstances les plus favorables, l'air est toujours frappé violemment par les ailes, ce qui donne lieu à des perturbations très-nuisibles ; et dans tous les cas la vitesse absolue de l'air sortant est toujours très-considérable.

Dans les ventilateurs à mouvement circulaire de translation, les degrés de vitesse de l'origine des canaux sont très-variés, et il s'en trouve probablement toujours quelques-uns qui correspondent au maximum d'effet utile. Il doit en résulter que le mouvement de l'air; placé dans ces conditions, exerce sur les particules fluides plus éloignées ou plus rapprochées de l'axe, une espèce de traction qui contribue à les entraîner dans les canaux.

La différence que nous avons observée entre les résultats de l'expérience et ceux de la théorie, quant à l'influence de la section nuisible, me porterait aussi à croire, qu'une partie assez notable de l'air aspiré, s'engage entre les cloisons moins éloignées de l'axe que le rayon de partage, et que cet air est ensuite entraîné par l'effet du mouvement de rotation dans la section utile, les fluides ne pouvant pénétrer directement dans les canaux éloignés de l'axe avec autant de facilité, ni les remplir entièrement à cause de la grande vitesse de l'origine de ces canaux.

L'effet de la vis serait ainsi dû à un mouvement de translation combiné avec l'action de la force centrifuge.

Défectuosités de la vis.

59. Tout en reconnaissant à la vis une supériorité sur les ventilateurs à force centrifuge, je ne pense pas que cette forme soit la plus convenable et la plus rationnelle pour les appareils à mouvement de translation. Les hélices successives qui composent la cloison de la vis forment près de l'axe un angle presque droit, avec la direction du mouvement, tandis que cet angle va en diminuant en s'approchant du contour extérieur. Ainsi pour la vis de Trieukaisin l'inclinaison de l'hélice extrême est seulement de 8°,27'.

Cette disposition me paraît présenter plusieurs inconvénients :

1° La vitesse relative étant donnée par la relation $\sqrt{w^2 r^2 \cos^2 a - 2gH}$, cette vitesse diminue lorsqu'on s'approche de l'axe, non seulement parce que le rayon est moindre, mais aussi parce que l'angle a augmente. Ces deux causes se réunissent donc pour favoriser la rentrée de l'air extérieur dans la section qui avoisine l'axe.

2° L'inclinaison des hélices sur la direction du mouvement étant très considérable jusqu'à une certaine distance de l'axe, la vitesse absolue de l'air sortant est augmentée par cette circonstance.

3° Lorsque la vis doit avoir un grand diamètre, l'inclinaison des hélices extrêmes peut devenir trop faible.

4° Enfin il est fort difficile d'exécuter en tôle des surfaces gauches, cette matière ne se prêtant convenablement qu'à former des surfaces développables.

Aucun de ces inconvénients ne se retrouve dans les ventilateurs à aîles plano-coniques.

Ventilateurs à aîles plano-coniques.

60. Ce ventilateur a quelque ressemblance avec les petits appareils que l'on emploie dans les cabarets. Il se compose d'un certain nombre d'aîles planes, terminées par des portions peu étendues de surfaces coniques propres à diriger l'air sortant en sens inverse du mouvement de rotation. L'enveloppe est cylindrique comme dans la vis, mais le noyau est formé d'un tronc de cône dont le sommet se trouve du côté de l'entrée de l'air, c'est-à-dire, que la section des canaux va en diminuant à partir de l'origine.

Pour simplifier la théorie, considérons d'abord un ventilateur à aîles planes contenues entre deux surfaces cylindriques. Pour en

faire un ventilateur plano-conique il suffira de courber un peu l'extrémité des aîles et d'évider le noyau à la partie inférieure; l'on pourra d'ailleurs, sans inconvénient, admettre pour le second les résultats théoriques applicables au premier.

Le ventilateur à aîles planes diffère de la vis en ce que dans ce ventilateur, les aîles sont formées d'une suite d'hélices toutes de même inclinaison et de pas différent, tandis que dans la vis le pas reste constant et l'inclinaison varie. Les aîles doivent être construites de manière que l'extrémité de l'une et l'origine de la suivante soient dans le même plan passant par l'axe. Elles affectent ainsi la forme d'un trapèze curviligne.

Il résulte de cette disposition que la couronne comprise entre les deux surfaces cylindriques est égale à la projection de la surface des aîles sur un plan perpendiculaire à l'axe. Si on désigne par a l'angle d'inclinaison des aîles, le pas p d'une hélice quelconque correspondant au rayon r, sera donné par la relation $p = 2\pi r \operatorname{tang} a$.

En substituant à r la valeur du rayon de l'enveloppe, on aura la hauteur de cette enveloppe pour un ventilateur composé d'une seule aîle. Pour deux aîles cette hauteur pourra être réduite de moitié et ainsi de suite; de sorte que si n désigne le nombre d'aîles, la hauteur du ventilateur à une distance r de l'axe sera égale à

$$\frac{2\pi r \operatorname{tang} a}{n}.$$

L'étendue des canaux étant aussi proportionnelle au rayon, sera bien moindre que dans la vis lorsqu'on s'approchera de l'axe. Ainsi dans la vis de Sauwartan, l'inclinaison de la première hélice est de 84°21′ et sa longueur développée est de $1^m,467$. Dans un ventilateur où l'angle constant d'inclinaison serait de 18°22′, celui de l'hélice extrême de la vis, cette longueur serait réduite à $0^m,153$.

On voit donc que le mouvement de l'air près de l'axe est favorisé non seulement par l'effet d'une inclinaison moins grande, mais aussi parce que l'espace à parcourir est moins étendu; pour les parties éloignées de l'axe on peut conserver l'inclinaison jugée la plus favorable.

Théorie du ventilateur plano-conique.

61. Appelons comme précédemment :

w la vitesse angulaire du ventilateur;

r_0 et r_1 les rayons du noyau et de l'enveloppe ;

H la hauteur de la colonne d'air qui mesure l'excès de la pression extérieure sur la pression intérieure ;

a, l'angle d'inclinaison des aîles.

La section totale des canaux sera égale à la surface de la couronne comprise entre les deux cylindres, projetée sur un plan faisant avec cette surface un angle de $90°-a$, ou égale à

$$\pi(r_1^2-r_0^2)\sin a \ldots \text{(1)}$$

Nous aurons d'un autre côté pour la vitesse théorique à une distance r de l'axe

$$u=\sqrt{w^2r^2\cos^2 a-2g\text{H}}$$

et comme l'élément de la section est égale à

$$2\pi rdr \sin a$$

le volume théorique extrait sera donné par l'intégrale

$$\int_{r_0}^{r^1} 2\pi rdr \sin a\sqrt{w^2r^2\cos^2 a-g\text{H}},$$

en la résolvant et supposant $w \cos a = w'$, on obtient

$$\text{V}=\frac{2\pi \sin a}{3w'^2}\left\{(w'^2r_1^2-2g\text{H})^{3/2}-(w'^2r_0^2-2g\text{H})^{3/2}\right\} \ldots \ldots (m)$$

L'expérience seule peut prononcer sur l'inclinaison la plus favorable à donner aux cloisons et sur le nombre d'aîles qu'il convient d'adopter. Je me propose à cet effet de faire construire un ventilateur de ce système et de le placer dans des conditions assez variées pour obtenir sur ces problèmes et sur l'efficacité de l'appareil les notions pratiques indispensables.

Théoriquement, en augmentant le nombre d'aîles on diminue les résistances dues au frottement. La surface totale des aîles est constante, quel que soit leur nombre, et toujours égale à $\frac{\pi(r_1^2-r_0^2)^2}{\cos a}$; les aîles sont en contact avec l'air, sur chacune de leurs faces, ce

(1) On a pour l'élément de la section l'expression $2\pi rdr \sin a$ et pour la section entière $\int_{r_0}^{r_1} 2\pi rdr \sin a = \pi \sin a(r_1^2-r_0^2)$

qui donne pour la surface invariable de contact deux fois cette quantité. Mais la hauteur du noyau et du cylindre enveloppe est en raison inverse du nombre d'ailes ; par conséquent l'étendue du parcours de l'air contre ces parties, et par suite le frottement qui en résulte, suivront la même proportion.

Supposons que l'on ait construit un ventilateur composé de 6 ailes, inclinées de 10°, et que sous un excès de pression de $30^m,5$ d'air ou de $0^m,04$ d'eau, il fasse 600 tours par minute.

Nous aurons pour la vitesse angulaire $w=62^m,83$ et pour la vitesse angulaire suivant l'inclinaison $w \cos a = w' = 61^m,887$. Si la partie supérieure du noyau a $0^m,40$ de rayon, on aura à cette distance pour la vitesse relative, $u=\sqrt{w'^2 r_0^2 - 2gH} = \sqrt{14,26}$, qui indique que ce rayon est plus que suffisant pour empêcher la rentrée de l'air. Si l'on suppose le rayon de l'enveloppe de $0^m,80$ on trouvera pour le volume théorique aspiré, d'après la formule (m)

$$V = 7^{m^3},565.$$

Si on suppose que le rayon croisse de $0^m,10$ en $0^m,10$, on aura pour le volume débité par chaque section partielle

section comprise en $0^m,40$ et $0^m,50$ de rayon. . . .	$0^{m^3},64$
« « $0^m,50$ et $0^m,60$	1, 423
« « $0^m,60$ et $0^m,70$	2, 274
« « $0^m,70$ et $0^m,80$	3, 228
Total.	$7^{m^3},565$

En divisant le volume par la section totale, on a la vitesse moyenne théorique. On aura la vitesse moyenne pratique en divisant par cette même section le volume réellement aspiré. On pourra admettre, avec une exactitude suffisante, que la différence de ces deux vitesses est due aux résistances que l'air éprouve dans son mouvement, et si on représente la première par v et la seconde par u, on aura pour l'expression de ces résistances :

$$h' = \frac{v^2 - u^2}{2g}$$

Appelons x le rayon auquel correspond la vitesse théorique v, on aura la relation

$$v^2 = w'^2 x^2 - 2gH.$$

On pourra, je pense, admettre avec une approximation suffisante, que la vitesse absolue moyenne de l'air sortant est égale à $wx - u$ correspondant à une hauteur

$$h'' = \frac{(wx-u)^2}{2g}$$

et comme d'après la relation précédente $w^2x^2 = \frac{v^2+2gH}{\cos^2 a}$,

on aura $$h'' = \frac{v^2+2gH}{\cos^2 a \cdot 2g} + \frac{u^2}{2g} - \frac{2u\sqrt{v^2+2gH}}{2g \cos a}$$

et pour l'expression de l'effet utile ;

$$E = \frac{H}{H+h'+h''} =$$

$$= \frac{2gH\cos^2 a}{(1+\cos^2 a)(v^2+2gH) - 2u\cos a\sqrt{v^2+2gH}} \quad (n)$$

On voit qu'à l'aide de cette formule on pourra calculer très-approximativement l'effet utile théorique, lorsqu'on aura déterminé v et u comme nous venons de l'indiquer.

62. La forme conique que nous proposons de donner au noyau du ventilateur, a pour objet de favoriser l'introduction de l'air aspiré dans les canaux : les parties rapprochées de l'axe, étant animées d'une moindre vitesse, l'air peut y pénétrer plus facilement, et par l'effet du mouvement de rotation, il est entraîné vers les orifices de sortie avec les particules fluides, qui sont entrées dans les canaux à une plus grande distance de l'axe. D'un autre côté, en donnant à la base extérieure du noyau un diamètre suffisant, on évite l'établissement de doubles courants dans l'intérieur de l'appareil.

En courbant l'extrémité des ailes suivant une portion de surface conique, non seulement on oppose la vitesse relative de sortie au mouvement de rotation, mais par le léger rétrécissement que cette forme occasionne, on rend la vitesse dans l'orifice un peu plus grande que la vitesse relative dans les canaux.

Pour empêcher le mouvement giratoire des fluides aspirés dans le conduit d'appel, il serait convenable, je pense, d'établir en avant du ventilateur à l'exemple de M. Lesoinne, une cloison formée de deux plans de $0^m,10$ à $0^m,20$ de hauteur, rectangulaires entre eux et passant par l'axe. Les circonstances du mouvement de l'air sont trop variables et trop peu connues pour que l'on puisse soumettre au calcul la forme qu'il faudrait donner aux cloisons pour que l'air pénétrât sans choc dans les canaux mobiles de l'appareil ; mais on devrait laisser un certain intervalle entre l'origine de ces canaux et la tranche des cloisons pour éviter les violentes compressions

qui pourraient avoir lieu par le mouvement rapide de l'une des parties, si cet intervalle était trop faible. (1)

Ventilateur à aîles de moulins à vent.

63. Ce ventilateur, quoique peu connu, date cependant déjà de 1837 : Il est par conséquent antérieur à tous ceux que nous avons examinés, et me paraît devoir donner des résultats plus favorables que ceux actuellement en usage.

M. Lesoinne a été guidé dans sa construction par cette idée, que la forme la plus convenable pour un récepteur de la force du vent, serait aussi la plus convenable pour un appareil d'aspiration.

M. Combes a renversé la turbine pour en faire un ventilateur à aîles courbes : M. Lesoinne a adopté pour son appareil la forme indiquée par Smeaton pour les aîles des moulins à vent. Il a en outre placé dans le canal d'aspiration un diaphragme pour empêcher le mouvement giratoire de l'air.

Le ventilateur à aîles de moulin est maintenant fréquemment employé pour aérer des parties de mines peu étendues, comme des tailles ou des galeries isolées, où il faut momentanément activer la ventilation. Dans ces circonstances, il paraît avoir donné des résultats très-satisfaisants; mais les dépressions nécessaires étaient toujours très-faibles, et comme il n'a jamais servi à l'aérage d'une grande mine, il n'a fait l'objet d'aucune expérience rigoureuse.

Les ventilateurs qui ont été construits ont de six à dix aîles; les diamètres du noyau et de l'enveloppe sont respectivement de $0^m,10$ à $0^m,15$ et de $0^m,85$ à $0^m,90$.

Les aîles sont construites en tôle et ont à-peu-près l'inclinaison que Smeaton a reconnue la plus favorable pour les moulins à vent, ou environ 18° à 19° près du noyau, et 7° à 8° près de l'enveloppe.

L'inclinaison va en augmentant à mesure qu'on se rapproche de l'axe comme dans la vis, mais dans une proportion beaucoup moindre. Il en résulte, que si les inductions que j'ai tirées des faits observés, sont sanctionnées par l'expérience, le ventilateur à aîles de moulin est intermédiaire pour les avantages et les inconvénients entre la vis pneumatique et le ventilateur plano-conique; il diffère cependant beaucoup moins de ce dernier que de la vis, et il doit

(1) Un ventilateur à mouvement de translation et à ailes planes se trouve établi près de Charleroi : dans une expérience faite par M. Glépin, il utilisait seulement 3 °/o du travail moteur. Mais il est tellement en dehors des conditions rationnelles d'un bon appareil de ventilation que ce résultat ne doit pas étonner.

donner des résultats plus favorables que tous les ventilateurs qui ont été jusqu'ici mis en usage.

Je me propose d'ailleurs de soumettre cet appareil à des expériences comparatives de nature à fournir les indications pratiques nécessaires.

Conclusions.

64. D'après l'ensemble des considérations que j'ai développées, lorsqu'il faut extraire de grands volumes d'air, sous un excès de pression marqué par une colonne d'eau supérieure à 0m,01 ou 0m,015, on peut ranger les machines d'aérage dans l'ordre suivant :

1° Machine à cloches plongeantes (M. de Vaux) ;
2° Machine à pistons ;
3° Ventilateur à aîles plano-coniques ;
4° Ventilateur à aîles de moulin (M. Lesoinne) ;
5° Vis pneumatique (M. Motte) ;
6° Ventilateur à force centrifuge et à aîles planes (M. Letoret) ;
7° Ventilateur à force centrifuge et à aîles courbes (M. Combes).

Je crois avoir établi d'une manière incontestable la supériorité des machines à soupapes bien construites et principalement des machines à cloches, sur toutes les autres pour l'aérage des grandes mines, dans les circonstances ordinaires où l'on est forcé d'avoir recours à des moteurs, c'est-à-dire lorsque l'appel de l'air nécessite une grande hauteur motrice.

Lorsqu'il ne s'agit que d'aérer des parties de mines restreintes, des lieux habités etc., et que par suite la dépression à produire est peu considérable ; ou lorsqu'on est gêné par l'espace dont on peut disposer pour établir la machine, on doit employer les ventilateurs de préférence aux machines à soupapes.

Les ventilateurs sur lesquels nous possédons des indications pratiques seraient, d'après ce qui précède, rangés dans l'ordre suivant :

1° Vis pneumatique ;
2° Ventilateur à force centrifuge et à aîles planes ;
3° Ventilateur à aîles courbes :

Mais les considérations que j'ai exposées, sont de nature, je pense, à rendre fort probable le succès des ventilateurs à aîles plano-coniques et à aîles de moulin, et à faire adopter l'ordre, où j'ai rangé ces divers appareils comme celui des avantages relatifs qu'ils présentent.

LÉGENDE EXPLICATIVE DES PLANCHES I ET II.

PLANCHE I.

Élévation de la machine à pistons de l'Espérance.

A Cylindre à vapeur.

BB Boîte de distribution de la vapeur ; le tiroir est mis en mouvement par l'action des taquets *bb* de la tige F sur le levier E.

C Tige du piston liée au parallélogramme au moyen d'une fourchette qui embrasse la traverse de l'extrémité du balancier.

DD Pierres sur lesquelles se trouve assis le cylindre à vapeur.

F Tige dont une extrémité est fixée à l'un des côtés du parallélogramme et dont l'autre glisse dans un cylindre fixe. Elle imprime le mouvement aux tiroirs de la machine.

G Axe du balancier.

HH Tiges des pistons de l'appareil de ventilation.

LL Cuves de la machine.

MM Conduits qui amènent l'air de la mine sous les cuves.

N Pistons des cuves dont le pourtour est garni d'un boyau en cuir, bourré de crins.

O Tuyau amenant la vapeur de la chaudière au cylindre.

a Levier servant à manœuvrer la soupape d'admission.

cc Traverses du balancier destinées à éviter le choc des pistons contre le fond des cuves.

d Pompes d'alimentation.

e Tuyau d'alimentation.

PLANCHE II.

Fig. 1. *Élévation de la machine à cloches plongeantes de la mine de Marihaye, à Seraing, avec la coupe de l'une des cloches.*

A Cylindre à vapeur.

B Boîte de distribution de la vapeur. Le tiroir est mu par un levier, qui à chaque extrémité de la course du piston est poussé par des taquets fixés à une barre B′, attachées aux guides du piston.

C Cloches en tôle plongeant dans l'eau de l'espace annullaire des cuves.

D Tuyau qui amène la vapeur du cylindre au réservoir R.

H Petit balancier auquel sont fixées les pompes à eau froide et d'alimentation P et P'.

Fig. 2. Plan d'une cloche.

Fig. 3 et 4. Disposition à donner aux contrepoids qui servent à équilibrer les clapets.

Fig. 5. Effet de la force centrifuge sur un liquide contenu dans un vase.

Fig 6. Disposition adoptée par M. Letoret pour l'établissement des ventilateurs à force centrifuge.

HH Canaux qui mettent en communication le puits d'aérage avec le ventilateur.

O Diaphragme lenticulaire destiné à empêcher la rencontre des courants qui arrivent par les ouvertures I, I.

aa Aîles du ventilateur formées de plaques en tôle fixées sur les montans *hh*, qui sont articulés aux extrémités des bras du ventilateur et fixés dans une position plus ou moins inclinées par des demi cercles.

V. — *Observations sur le procédé indiqué par Monsieur Ed. Frémy, pour séparer la Potasse de la soude,*

Par Is. KUPFERSLAEGER,

PRÉPARATEUR DE CHIMIE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

L'existence de la soude en solution n'a pu être démontrée jusqu'a présent, avec l'apparence positive*, parce que on ne possédait encore aucun réactif qui pût la précipiter de ses combinaisons, dans lesquelles sa présence ne pouvait être constatée que par des réactions négatives.

Delà l'emploi fréquent et journalier de la soude et de ses sels, pour falsifier les composés potassiques usités tant en médecine qu'en industrie, sans qu'on pût convenablement déceler la fraude, ni séparer en totalité et avec avantage la soude ou ses composés, des composés de potasse (1).

Cette constatation positive de la soude en solution, était donc un problème important, que pendant longtemps on a cherché à résoudre, et dont la solution était vivement sollicitée par la science et l'industrie, qui réclamaient un moyen propre à faire reconnaître et à séparer la soude, même dans des dissolutions potassiques.

Ce problème fut, dans ces derniers temps, résolu par M. Ed. Frémy; dans la séance du 23 janvier 1843 de l'Académie des sciences de Paris (Journal l'Institut, année 1843, N° 474), il annonça avoir découvert un réactif, qui accuse la présence de la soude en solution, même en petite quantité, et qui de plus, est propre à la séparer tout à fait de la potasse lorsqu'elle y est mélangée.

Ce réactif est l'*antimoniate potassique basique*, lequel, dissout et versé dans une solution renfermant de la soude, ou un sel sodique, donne au bout de quelque temps et par l'agitation, un précipité d'aspect cristallin, composé d'Antimoniate sodique pur, lors même qu'il prend naissance dans une solution qui contient aussi de la potasse.

Ce résultat, comme on le pense, fut bien accueilli, et reçut l'approbation des personnes compétentes, (Barreswil, et Sobrero)

* Par opposition avec négative, réaction de la soude.

(1) On sait que le chloride platinique précipite la potasse de ses dissolutions concentrées et non pas la soude ; cependant si cette dernière est mélangée à la potasse, a séparation est moins complète, parce que la soude forme avec le chloride platinique et par évaporation, un chlorure platinico-sodique, qui se dépose par la concentration de la liqueur. Si on ajoute à cela la cherté du réactif, on aura la mesure de ce que l'on peut faire, lorsqu'il s'agit de masses considérables à traiter, comme il arrive dans l'industrie.

qui indiquèrent l'emploi de cet antimoniate potassique basique, dans les analyses chimiques, pour séparer la potasse de la soude.

Dans son mémoire M. Frémy dit que l'on peut employer l'antimoniate potassique basique pour précipiter la soude sans entraîner la potasse; mais il ne dit pas si tous les composés potassiques peuvent être séparés des sels sodiques, sans qu'ils soient eux-mêmes précipités, ni quels sont ceux qui peuvent l'être, dans le cas où il s'en trouverait qui fussent précipitables. Ce qui fait que ce procédé de séparation, destiné à recevoir un fréquent usage et à acquérir de l'importance dans la suite, pourrait fort bien être pris à la lettre et être appliqué indistinctement à tous les composés et sels potassiques, comme on est porté à le croire, puisque l'auteur n'y a fait aucune restriction.

C'est ce qui nous a engagé, pour faire disparaître tous les doutes à cet égard, à tenter quelques recherches relatives à l'emploi de ce réactif, recherches que nous consignons ci-après avec leurs résultats.

Ayant fait usage de l'antimoniate potassique alcalin, préparé comme il est indiqué dans l'*Appendice à tous les traités d'analyse chimique de MM. Barreswil et Sobrero* (page 532), voici ce que nous avons observé avec des sels potassiques et sodiques purs.

Sels potassiques.

Le carbonate potassique, n'a rien fourni, ni à froid ni à chaud.
Le bicarbonate a fourni un précipité blanc.
L'oxalate neutre rien même à chaud.
Le bioxalate id. id.
Le quadroxalate id. id.
L'Azotate potassique, un précipité blanc abondant.
Le sulfate idem.
Le bisulfate se trouble, et précipite à chaud.
L'Arséniate précipité blanc abondant.
L'arsénite idem.
Le Phosphate précipité blanc par l'ébullition.
Le chlorate précipité blanc.
Le chlorure rien, léger trouble par l'ébullition.
L'iodure de même.

Sels sodiques.

Le Carbonate sodique, se trouble et précipite par l'agitation de la chaleur.
Le bicarbonate précipité blanc.
Le biborate (Borax) idem.

Le c Phosphate	rien à froid, précipité blanc à chaud.
L'Azotate	précipité blanc.
Le sulfate	idem
Le chlorure	idem.
L'iodure	idem.

Les précipités des sels potassiques sont pulvérulents et instantanés, tandis que ceux de soude sont d'apparence cristalline, et lents à se déposer; excepté celui des carbonates, qui est floconneux quand il se forme instantanément. L'agitation ou l'application de la chaleur hâte la formation des précipités sodiques.

Comme on le voit, par ce petit tableau, sur 14 solutions potassiques employées, 8 ont donné des précipités, ce qui fait que l'on doit consulter le genre du sel potassique, sur lequel on opère, avant de faire usage d'antimoniate potassique.

Cependant nous devons ajouter qu'ayant versé de l'antimoniate potassique basique dans une solution mixte, faite à partie égale de carbonate potassique et de carbonate sodique, neutres, il ne s'est rien formé à froid, ni par l'agitation; mais que l'ayant soumise à la chaleur, le précipité s'est montré avec son aspect cristallin. Après un repos suffisant nous avons séparé le précipité de la liqueur, et lavé parfaitement; puis l'ayant dissout dans quelques gouttes d'acide chlorhydrique, et neutralisé la liqueur par du carbonate sodique, nous y avons versé du chloride platinique, et nous n'avons pas obtenu le moindre précipité; tandis que la liqueur filtrée a donné instantanément, par le chloride platinique, un précipité jaune; caractère comme on sait qui distingue les sels potassiques, des sels sodiques.

Ce qui précède s'accorde avec ce que dit M. Frémy que l'on peut séparer la potasse de la soude; mais nous ajoutons, *le plus convenablement lorsque ces deux bases sont à l'état de carbonates neutres.* Nous ferons remarquer que la précipitation du bicarbonate potassique, par l'antimoniate potassique, n'est pas un motif qui doive faire rejeter l'emploi de ce réactif pour séparer la potasse de la soude, lorsque le sel est un bicarbonate; car l'on sait que l'ébullition prolongée, ramène le bicarbonate à l'état de carbonate neutre, lequel ne précipite pas; c'est donc ce que l'on devra faire avant d'y ajouter le réactif.

Nous n'entrerons point dans de plus longs détails à cet égard, n'ayant eu d'autre but en livrant ces observations, que d'attirer l'attention des savants sur ce point important, en même temps que d'être utile aux personnes qui s'occupent d'analyses chimiques.

VI. — *Mémoire sur les propriétés de l'Ellipse ;*

Par J.-N. Noel,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Préliminaires.

I. Les lignes du second ordre, dont l'étude est l'objet de la géométrie analytique plane, possèdent, comme on sait, un grand nombre de propriétés importantes. On sait aussi que, parmi ces propriétés, les plus utiles sont celles de l'ellipse et de la circonférence, lesquelles se déduisent souvent les unes des autres, à raison de la grande analogie entre les deux courbes.

II. La possibilité de représenter les lignes planes par des équations, entre les coordonnées variables x et y de chacun de leurs points, en facilite singulièrement l'étude complète ; et d'abord l'équation étant donnée, on en déduit la nature et la forme de la ligne, lesquelles dépendent essentiellement du degré de l'équation ; et celle-ci fournit toujours quelques propriétés *caractéristiques* de la ligne proposée, d'où l'on peut la définir et la décrire ensuite.

III. Ligne droite. On démontre aisément que *toute équation du premier degré, ramenée à la forme*

$$y=nx+h,$$

représente une ligne droite, et réciproquement. Pour que la droite soit déterminée de *position* sur le plan, il faut que les deux *constantes arbitraires* n et h soient des nombres connus, *positifs* ou *négatifs.* Or, $x=0$ donne $y=h$; ainsi h est la distance numérique de l'origine au point où la droite coupe l'axe des y. De même, $x=1$ donne $n=y'-h$; de sorte que n est la différence des ordonnées qui répondent à $x=0$ et à $x=1$. Or, si h est connue, $x=0$ donne un premier point de la droite proposée ; tandis que si n est donnée numériquement, $x=1$ fait connaître y' et par suite un second point de la droite : celui-ci en détermine donc la *direction*. Voilà pourquoi il convient d'appeler *direction* de la droite, le coefficient n de x dans son équation. La direction n a donc $y'-h$ pour valeur analytique ; et quant à son expression trigonométrique, c'est le rapport

des sinus des angles α et β que la droite fait avec les axes des x et des y. De sorte que si les coordonnées sont rectangulaires, on a $n = \text{tang}\,\alpha$.

Observons d'ailleurs que si k désigne la distance de l'origine au point où la droite coupe l'axe des x; la droite est alors représentée par l'équation *homogène*

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{h} = 1\text{; d'où } n = \frac{h}{k}.$$

Cette équation l'emporte sur l'autre pour résoudre certains problèmes, et particulièrement dans la théorie des *transversales* rectilignes; mais généralement l'équation $y = nx + h$ est préférée dans la *combinaison* des droites et des points.

IV. Par exemple, connaissant les extrémités (x,y) et (x',y') d'une droite donnée d; si l'on veut calculer le point (X,Y), divisant d en deux parties p et q, dans le rapport connu R, d'où $p = q\mathrm{R}$, il faudra employer l'équation $y = nx + h$, avec les expressions des distances p et q, l'angle θ des coordonnées étant quelconque : on trouvera

$$(1+\mathrm{R})\mathrm{X} = x + \mathrm{R}x' \text{ et } (1+\mathrm{R})\mathrm{Y} = \mathrm{Y} + \mathrm{R}y'.$$

Si $p = q = \frac{1}{2}d$, ou $\mathrm{R} = 1$, il vient $2\mathrm{X} = x + x'$ et $2\mathrm{Y} = y + y'$. D'ailleurs $2\mathrm{X} = x + x'$ revient à $x' - \mathrm{X} = \mathrm{X} - x$; de sorte que le pied de Y divise $x' - \mathrm{X}$ en deux parties égales. Ainsi *dans tout trapèze, la droite* Y *qui joint les milieux des côtés latéraux* d *et* $x' - \mathrm{X}$, *est parallèle aux deux bases* y' *et* y, *et vaut leur demi-somme.* Si d'ailleurs $x = y = 0$, d'où $2\mathrm{Y} = y'$, on en conclut que *la droite joignant les milieux des côtés latéraux de tout triangle, est parallèle à la base* y' *et en vaut la moitié.*

De plus, pour R quelconque, on a $p : q = x' - \mathrm{X} : \mathrm{X} - x = y' - \mathrm{Y} : \mathrm{Y} - y$. On retrouve donc ainsi la propriété des triangles équiangles, d'où l'on est parti pour démontrer que $y = nx + h$ représente une suite de points en ligne droite.

V. Soient $y = nx + h$ et $y = n'x + h'$ deux droites données, et (x',y') un point connu de la seconde : si l'on veut calculer le point (x,y) d'intersection de ces deux droites, on posera $a = y' - nx' - h$ et l'on trouvera

$$(n - n')(x - x') = a \text{ et } (n - n')(y - y') = an'.$$

Si les deux droites proposées sont parallèles, leur intersection (x,y) n'existe pas; les deux valeurs de $x - x'$ et $y - y'$ sont donc impossibles. Or, cela exige que a n'étant pas nul, on ait $n - n' = 0$

ou $n=n'$. Réciproquement, si $n=n'$, a n'étant pas nul, *les deux droites sont parallèles.*

Si l'intersection (x,y) existe, soit d sa distance au point (x',y'); soit $c=\cos\theta$ et $s=\sin\theta$: on aura, pour calculer d,

$$(n-n')^2d^2=a^2(1+n'^2+2cn').$$

Si n' est variable avec d seule, cette équation, résolue par rapport à n', donne, pour le *minimum* de d,

$$d\sqrt{(1+2cn+n^2)}=as=(y'-nx'-h)s.$$
$$\text{et } (d^2-a^2)n'=d^2n+a\ c.$$

Puisque d est la plus courte distance du point (x',y') à la droite $y=nx+h$, d est nécessairement perpendiculaire à cette droite. Éliminant donc d^2, d'où $(c+n)(1+nn'+cn+cn')=0$, on aura, pour la condition de *perpendicularité* des deux droites $y=nx+h$ et $y=n'x+h'$, la relation

$$1+nn'+(n+n')\cos\theta=0.$$

Telle est la condition, nécessaire et suffisante, pour que les deux droites, dont n et n' sont les directions, soient perpendiculaires entre elles. Et comme cette condition est indépendante de h et de h', on voit que toute droite perpendiculaire à l'une des parallèles (de direction n commune) est perpendiculaire à toutes les autres.

VI. La condition ci-dessus et l'expression du minimum d se simplifient beaucoup lorsque $\theta=90°$, d'où $\cos\theta=0$ et $\sin\theta=1$. Aussi lorsqu'il s'agit de calculer les angles et les distances, faut-il prendre l'angle $\theta=90°$, comme dans les propositions que voici, à établir :

1° Tous les points chacun à égales distances de deux droites qui se coupent appartiennent à deux droites rectangulaires, bissectrices des angles de ces deux droites. Mais ces droites ne seraient pas rectangulaires, si l'une des distances de chaque point devait être double de l'autre.

2° Si du point $(a,0)$ de l'axe des x rectangulaires, on mène une oblique quelconque à l'axe des y, l'extrémité de la perpendiculaire à l'oblique, de même longueur et menée par son pied, se trouve sur l'une des deux droites rectangulaires $y=x+a$ et $y=-x-a$. (Cela conduit à une propriété, assez remarquable, du carré).

3° Une droite et un point au-dehors étant donnés ; quel est le lieu géométrique des points divisant chacun toute droite, menée du point à la droite, en deux parties, dans le rapport connu de a à b?

4° Chaque point du plan d'un rectangle donné est tel, que la somme des carrés faits sur les distances de ce point à deux sommets

opposés vaut la somme des carrés construits sur ces distances aux deux autres sommets. Mais si la différence des deux premiers carrés doit être équivalente à la différence des deux derniers, ou si les quatre carrés doivent être proportionnels, ou enfin si la somme de deux premières distances doit être égale à la somme des deux autres; chaque fois les points, dont chacun jouit de la propriété énoncée, se trouvent sur deux droites rectangulaires.

VII. Les axes rectangulaire simplifient les calculs; cependant il est parfois préférable de les rendre obliques; comme dans les propositions que voici :

1° Trois parallèles, de longueurs données inégales, étant deux à bases de trois trapèzes, les trois intersections des trois couples de côtés latéraux appartiennent à une même droite. (Ici l'axe des x obliques étant sur l'une des parallèles, celui des y doit passer par deux des trois intersections).

2° Soit O un point du parallélogramme donné MNPQ : si O est l'origine des coordonnées obliques dont les axes soient respectivement parallèles aux côtés du parallélogramme, savoir l'axe des x rencontrant en A et C les côtés opposés NP et MQ, tandis que celui des y rencontre en B et D les côtés opposés PQ et MN; il y aura, dans l'ensemble des cinq parallélogrammes, six systèmes de trois diagonales se coupant en un même point, savoir : 1° QA, BN et MO; 2° MB, CP et NO; 3° MA, DP et QO; 4° QD, CN et PO; 5° CB, DA et PM; 6° enfin, CD, BA et QN.

3° Les trois intersections 1°, 4° et 5° ne seraient-elles pas en ligne droite, de même que 2°, 3° et 6°? Ce qui le ferait penser, c'est que quand l'origine O est le centre de MNPQ, 5° et 6° cessent d'exister, tandis que 1°, 2°, 3° et 4° sont les sommets d'un parallélogramme, semblable et concentrique à MNPQ.

4° Soit le triangle quelconque ABC : par les sommets B et C, on mène, aux côtés opposés AC et AB, les parallèles BD et CE, de longueurs données arbitraires, d'où les droites BE et CD se coupent en un point O; si de plus, par D et E, on mène à AB et à AC, deux parallèles se coupant en P; les trois points O, A, P sont en ligne droite.

VIII. CIRCONFÉRENCE. L'équation de la circonférence prend diverses formes, pour exprimer que tous les points de cette ligne plane sont à la même distance du centre fixe. Cette équation conduit, avec facilité, à toutes les propriétés de la ligne circulaire; mais les coordonnées doivent être rectangulaires, comme dans les propositions que voici :

1° Le lieu géométrique de tous les points tels, que la somme des carrés des distances de chacun aux sommets du triangle T, dont a, b, c, sont les côtés donnés, soit le carré constant m^2, est la circonférence ayant pour centre celui de gravité de T. Le *minimum* de m^2 est $3m^2=a^2+b^2+c^2$; et alors la circonférence se réduit à son centre.

Il existe un théorème analogue pour le parallélogramme et pour tant de points, qu'on voudra donner sur un plan.

2° La circonférence à décrire est telle, que le carré fait sur la distance de l'un quelconque de ces points à l'extrémité de la base d'un triangle isocèle tracé, vaut la somme des carrés construits sur les distances de ce points aux deux autres sommets.

3° Calculer le rayon de la circonférence, lieu géométrique de tous les points tels, qu'en menant de l'un quelconque O de ces points les droites OA, OB, OC et OD aux quatre points A, B, C, D, donnés sur une droite, on ait l'angle AOB=COD. On suppose AB=2, AC=5 et AD=8.

4° Le point (4,0) est le sommet fixe d'un angle droit mobile, dont un côté s'arrête constamment à l'axe des y rectangulaires; quel est le lieu géométrique du point (x,y) de l'autre côté tel, 1° que la longueur de ce côté soit égal à l'abscisse x de ce point? 2° que le triangle résultant soit constamment isocèle? 3° que l'aire du triangle variable résultant soit toujours équivalente au carré 36?

5° Si l'espace plan autour d'un point O est divisé en m parties égales, par m droites; le point dont la somme des carrés de ces distances à ces n droites vaut le carré donné c^2, appartient à la circonférence ayant O pour centre et $2c^2$ sur m pour carré numérique du rayon.

6° Un polygone régulier de m sommets et son apothème a étant donnés; chaque point, dont la somme des carrés des distances aux m côtés, vaut le carré donné c^2, appartient à la circonférence, de même centre que le polygone et de rayon r tel, qu'on a $\frac{1}{2}mr^2=c^2-\frac{1}{2}ma^2$. Pour le minimum de c^2, cette circonférence se réduit à un seul point.

7° Deux circonférences concentriques, dont les rayons a et b sont donnés, sont toujours telles, que la somme des carrés des distances de chaque point de la plus petite aux m points, qui divisent la plus grande en m parties égales, vaut constamment $m(a^2+b^2)$.

(Ces trois derniers théorèmes exigent la sommation de certaines séries trigonométriques).

IX. LIGNES DU SECOND ORDRE. L'équation la plus générale du second degré, à deux variables x et y, peut toujours se ramener à la forme

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\ ; \ldots\ (a)$$

A étant positif et les autres coefficients, donnés numériquement, aussi bien que A, ayant des signes et des valeurs quelconques. Si cette équation est *possible*, elle détermine chacun des points (x,y) d'une ligne nécessairement courbe, dite *ligne du second ordre* ou *courbe du second degré*. Comme la *forme* et le *genre* de cette courbe dépendent essentiellement des valeurs et des signes des coefficients et que l'équation, supposée toujours possible, représente toutes les courbes imaginables du second degré, pour une même valeur de l'angle θ des coordonnées, il est naturel d'en déduire toutes les *propriétés* de ces courbes, comme d'une source commune, qui les rend parfaitement *analogues*, en passant d'une courbe à une autre, et étend ainsi la théorie, développée pour un genre, à tous les autres genres, moyennant certaines modifications, très-simples et faciles à prévoir. Mais l'étude des lignes du second ordre, d'après l'équation complète ci-dessus, serait fort difficile, à raison de la complication des calculs, qui masqueraient souvent les conséquences. Il faut donc *représenter* les lignes du second ordre par leurs équations les plus simples; et il existe, à cet effet, plusieurs méthodes. La suivante, indiquée dans mon traité de géométrie analytique et dont mon collègue, M. Brasseur, avait fait usage de son côté, dans son traité lithographié, est la plus directe; car il en résulte immédiatement la *forme* générale des courbes de même genre, cette forme étant caractérisée par le binome B^2-4AC.

Coupons en effet, la courbe (a) par la sécante $y=nx+h$, n et h étant deux constantes entièrement arbitraires : comme aux points d'intersection les x et les y ont mêmes valeurs respectives, dans les équations des deux lignes, on peut éliminer y; et alors on a

$$\begin{aligned}&(An^2+Bn+C)x^2+(2Ahn+Bh+Dn+E)x\\&+Ah^2+Dh+F=0.\end{aligned}$$

Cette équation finale en x étant du second degré, il y aura généralement deux abscisses, deux ordonnées et deux points d'intersection, au plus. Or, n et h étant complèment arbitraires, l'équation en x fournit les conditions pour que, 1° *la droite ne coupe la courbe qu'en un seul point ;* 2° *ne la coupe pas ;* 3° *lui soit tangente ;* 4° *lui soit asymptote*, c'est-à-dire s'en approche continuellement,

sans jamais la rencontrer. Développons la première de ces conditions.

Pour que la droite $y=nx+h$ ne coupe la courbe (a) qu'en un seul point, il faut que l'équation finale en x n'ait qu'une seule racine et soit par conséquent du premier degré ; il faut donc qu'on ait rigoureusement

$$An^2+Bn+C=0\text{ ; d'où } 2An=-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}.$$

Or, le binome B^2-4AC ne peut être que *nul*, *négatif* ou *positif;* il ne peut donc exister que *trois genres distincts de courbes du second degré;* et la forme de chaque courbe dépend essentiellement de la valeur du binome *caractéristique* B^2-4AC.

X. Parabole. Supposons $B^2-4AC=0$; nous aurons $2An=-B$. Dans ce cas, la direction n est constante ; elle est toujours réelle et unique, pour une même valeur arbitraire de h. Il existe donc, depuis $h=0$ jusqu'à $h=\pm\infty$, une infinité de droites *parallèles* ne coupant la courbe (a) qu'en un seul point chacune. Cette propriété caractérise essentiellement la ligne du second ordre, appelée *parabole;* car cette courbe est évidemment *infinie* et *ouverte* dans un seul sens : elle peut toujours se représenter par l'équation très-simple

$$y^2=2px\text{ ;}$$

vu qu'ayant ici $A=1$, $B=0$ et $C=0$, la condition caractéristique $B^2-4AC=0$ est satisfaite.

XI. Ellipse. Si le binome B^2-4AC est *négatif*, les deux valeurs de n sont *imaginaires;* la droite $y=nx+h$ ne peut donc jamais couper la courbe (a) en un seul point : elle la coupe en deux points ou pas du tout. La courbe, dans ce cas, est nécessairement *fermée*, *convexe*, *finie* et *rentrante sur elle même :* on l'appelle *ellipse* et peut toujours se représenter par chacune des équations, où les signes sont en évidence :

$$My^2+Nx^2=P \text{ et } y^2=2px-qx^2\text{ ;}$$

car chaque fois la condition caractéristique B^2-4AC *négatif* est satisfaite. Ce binome se réduit, en effet, à $-4MN$ ou à $-4q$.

XII. Hyperbole. Enfin, si B^2-4AC est *positif*, les deux valeurs de n sont réelles, inégales et constantes, quel que soit h ; il existe donc, deux systèmes, composés chacun d'une infinité de droites *parallèles*, ne coupant chacune la courbe (a) qu'en un seul point. De plus, les 2 valeurs de n, qui satisfont à l'équation $(2An+B)h+Dn+E=i$, i étant un *infiniment petit* d'un *ordre* quelconque,

donnent à h deux valeurs *finies* et *réelles* : ces valeurs de h, substituées dans

$$ix+Ah^2+Dh+F=0 \text{ et } y=nx+h,$$

donnent à x deux valeurs *infinies* et à y quatre valeurs, aussi *infinies;* les deux valeurs proposées de h fournissent donc deux sécantes qui se coupent (vu que les deux valeurs de n sont différentes) et coupent chacune la courbe (a) en deux points situés à l'*infini*. Cette courbe, bien différente de la parabole, a nécessairement deux *ouvertures* et deux *branches*, *séparées* et *infinies*, contenues dans deux angles opposés des deux droites d et d', qui répondent à i rigoureusement nul; car alors, pour les deux valeurs finies de h, les deux de x et les quatre de y cessent d'exister; donc les deux droites d et d' ne rencontrent point la courbe (a); tandis que pour i infiniment petit, les deux droites résultantes rencontraient chacune la courbe en deux points, situés à l'infini. Cette courbe, nommée *Hyperbole*, est donc composée de deux branches, séparées, égales, infinies et contenues dans les deux angles opposés de deux droites d et d', qui se coupent. D'ailleurs celles-ci s'approchent continuellement des deux branches, sans jamais les rencontrer; elles en sont donc les *asymptotes*.

L'hyperbole peut se représenter par chacune des trois équations

$$My^2-Nx^2=-P, \quad y^2=2px+qx^2 \text{ et } xy=H^2;$$

car chaque fois la condition caractéristique, savoir B^2-4AC *positif*, est satisfaite. Ce binome, en effet, se réduit à $+4MN$ dans la première équation, à $+4q$ dans la seconde et à $+1$ dans la troisième. Celle-ci représente l'hyperbole, rapportée à ses *asymptotes*, axes des x et des y, qu'elle ne rencontre jamais.

Par exemple, *si toutes les droites, partant du point donné* (8,6) *sont terminées, de part et d'autre, aux deux axes des coordonnées; le lieu géométrique de tous leurs milieux est une hyperbole, rapportée à ses asymptotes*. Ce lieu est, en effet, représenté par

$$xy=3x+4y, \text{ ou par } xy=12,$$

en passant à un système de coordonnées parallèles, pour faire disparaître les premières puissances de x et de y.

XIII. Il existe un grand nombre de problèmes, sur les *lieux géométriques* d'une infinité de points, fournissant les courbes du second degré. Par exemple, on trouve que la *parabole* est le lieu géométrique de tous les points tels, que la distance de chacun à l'axe des y soit égal à sa distance au point (2,0), donné sur l'axe des x. Le

lieu serait une *ellipse*, si la seconde distance devait être double de la première, ou si la somme des carrés des deux distances devait valoir le carré donné 36. Le lieu serait une *hyperbole*, si la première distance devait être double de la seconde, ou si le produit des deux distances devait être triple de celui des coordonnées du point.

On peut chaque fois calculer l'équation numérique de la courbe, 1° lorsque l'angle θ des coordonnées est droit, 2° lorsqu'il est de 60°. Chaque fois aussi, en résolvant l'équation proposée, par rapport à y, on peut construire la courbe, *par points successifs;* mais il est souvent plus simple et plus exact, à cet effet, de *rapporter* la courbe à ses *axes conjugués*, ou à ses *axes principaux*.

XIV. Axes conjugués. Si l'équation d'une ligne du second ordre conserve la même forme, quel que soit l'angle θ des coordonnées, moindre que 180°, on dit que la courbe est rapportée à ses *axes principaux* ou à ses *axes conjugués*, suivant que l'angle θ est droit ou non. Or, *une même ligne du second ordre admet une infinité de systèmes d'axes conjugués et un seul système d'axes principaux;* et c'est ce qu'il faut d'abord démontrer, pour les trois courbes. On y parviendrait par la *transformation des coordonnées;* mais il est bien plus clair et plus simple de procéder comme il suit.

XV. Parabole. Cherchons l'équation de la courbe plane telle, que la distance d de chacun de ses points (x,y) à l'axe des x soit moyenne proportionnelle entre l'abscisse x de ce point et le nombre donné $2p$.

Supposons d'abord l'angle θ des coordonnées, compris entre 0 et 90°; la distance d sera opposée à l'angle θ du triangle rectangle dont l'ordonnée y est l'hypoténuse; et ainsi $d=y\sin\theta$. Par l'énoncé, on doit avoir $x:d::d:2p$ ou $d^2=2px$; donc $y^2\sin^2\theta=2px$. Posant donc $2p=2p'\sin^2\theta$, d'où $2p'>2p$, on aura, pour l'équation du lieu cherché,

$$y^2=2p'x \quad . \; . \; . \quad (b)$$

Si l'on fait croître, *par degrés insensibles*, l'abscisse positive x, depuis zéro jusqu'à l'infini; comme $2p'$ est un nombre constant et donné, essentiellement positif, il est clair que l'ordonnée y croîtra, positivement et négativement, depuis $y=\pm 0$ jusqu'à $y=\pm\infty$: d'ailleurs x ne saurait avoir le signe $-$; la courbe (b) est donc *infinie* et *ouverte*, dans le sens des x positifs; c'est par conséquent une *parabole*, quel que soit l'angle θ; et c'est une parabole, rapportée à ses *axes conjugués* des x et des y.

On voit d'ailleurs que celui-ci *est tangent à la courbe, à l'origine* O ; car $x=0$ donne $y=\pm 0$. De plus, comme $x=k$ donne $y=\pm h$; la *corde* $2h$, parallèle à l'axe des y, est divisée en deux parties égales par l'axe *conjugué* des x. Celui-ci est un *diamètre* de la courbe ; parce que, dans les lignes du second ordre, on appelle *diamètre*, la droite *bisectrice* d'un système de cordes parallèles.

Le point M ou (x,y) restant invariable, aussi bien que $2p$, il est clair que la distance d augmente avec l'angle θ ; l'axe des x, toujours perpendiculaire à la droite sur laquelle d se trouvait, s'éloigne de plus en plus de sa position primitive, sans cesser de lui être parallèle, ni d'être *bisecteur* du système de cordes parallèles à son conjugué, axes des y, toujours tangent à la courbe. Car on a toujours $y^2=2p'x$, bien que $2p'$ diminue de plus en plus, depuis $\theta=0$ sur ∞ jusqu'à $\theta=90°$. Or $\theta=90°$ donne $2p'=2p$ et $y^2=2px$; l'équation (b) conserve donc toujours la même forme, quel que soit l'angle θ des coordonnées. Ainsi non-seulement la parabole admet une infinité de systèmes d'axes conjugués et un seul système d'axes principaux ; mais de plus, tous les axes des y touchent la courbe en chaque origine et tous les axes conjugués des x, *diamètres* de la parabole, sont parallèles à son axe principal des abscisses. Celui-ci d'ailleurs est le seul *axe de symétrie* de la courbe, comme bisecteur de toute corde $2h$ qui lui est perpendiculaire. La *forme* de la parabole est d'autant plus *ouverte*, que les coefficients constants $2p'$ et $2p$ sont plus grands : c'est pourquoi ces deux coefficients sont appelés *paramètres* de la courbe : $2p'$ est dit le *paramètre diamétral* et $2p$ le *paramètre principal* ou simplement le *paramètre*.

Puisque l'axe principal des x est déjà tracé et contient le pied P de la nouvelle ordonnée $MP=y=d$, il est clair que si l'on prend, sur cet axe et du côté des x positifs, la longueur $PN=2p$; la perpendiculaire à MN, élevée par le point M, ira couper le même axe au point S ; et comme alors $MP^2=2p.SP$, le point S, origine des axes principaux, appartient à la courbe : c'est le *sommet* de la parabole. Prenant sur l'axe principal des x et à partir de S, la longueur arbitraire SQ, qu'on prolongera de $2p$; la circonférence décrite sur le diamètre $SQ+2p$, coupera la perpendiculaire, menée par le point Q, sur QS, aux deux points G et G', appartenant à la parabole ; laquelle se décrit ainsi très-simplement, *par points successifs*.

Prenons sur l'axe principal des x, et de part et d'autre de l'origine S, les longueurs égales à $\frac{1}{2}p$, savoir SF et SK, F étant du côté des x positifs ; par le point K élevons sur FK la perpendiculaire

indéfinie KE, appelée *directrice* de la parabole : il est facile de démontrer, d'après l'équation $y^2=2px$, que *la parabole est une courbe plane telle, que les distances de chacun de ses points* M, *à la directrice et au point fixe* F, *sont égales entre elles* et à $x+\frac{1}{2}p$. Chaque distance r, de M à F, est appelée *rayon vecteur* du point M de la courbe, dont F est dit le *foyer*. Cette égalité des distances est tellement *caractéristique* de la parabole, qu'en cherchant le lieu géométrique de tous les points M, à égale distance du point F et de la droite EK, on retrouve l'équation $y^2=2px$. Cette équation fournit, comme on sait, la *description* de la parabole, soit d'*un mouvement continu*, soit *par points successifs;* mais pour ce dernier cas, le procédé indiqué ci-dessus est le plus simple, quoique peu connu.

Réciproquement, *la parabole étant tracée, voyons comment on trouve son équation aux axes conjugués et aux axes principaux*. Menant la droite D', par le milieu de deux cordes parallèles quelconques ; puis par le point O, où D' coupe la parabole, menant la parallèle P' aux deux cordes ; il est clair que P' *touche* la courbe au point O, vu que O est le milieu de la corde *nulle* sur P'. Or, D' et P' étant les axes conjugués des x et des y, dont O est l'origine, les coordonnées x et y du point M sont connue ; on connaîtra donc le paramètre diamétral $2p'$, par $y^2=2p'x$ ou par $x:y::y:2p'$.

Menant ensuite à D', par le point M, la perpendiculaire, que l'on prolongera en P, de telle sorte qu'on ait $MP=y$; la parallèle à D', menée par P, sera l'axe principal des x, coupant la courbe au sommet S. Menant enfin à SM, la perpendiculaire, coupant en N le prolongement de SP, la longueur PN sera le paramètre $2p$, ainsi déterminé ; car $MP^2=PN\cdot SP$. L'équation aux axes principaux sera donc $y^2=2px$.

Les autres propriétés de la parabole sont maintenant bien faciles à démontrer, d'après ses équations aux axes conjugués et aux axes principaux, et d'après $2p=2p'\sin^2\theta$. Il en résulte que, 1° les droites, menées du point de tangence, au foyer et parallèlement à l'axe principal, font avec la tangente et d'un même côté, deux angles égaux ; 2° le milieu de la portion OT de la tangente, entre le point de contact O, et l'axe principal des x, est à la fois sur l'axe principal des y et sur la perpendiculaire à OT, menée du foyer F, cette perpendiculaire et le diamètre en O se coupant sur la directrice ; 3° l'ordonnée du milieu de OT étant moitié de l'ordonnée du point O, il est facile de tracer la tangente en ce point ; 4° le rayon vecteur r du point quelconque O, origine d'un diamètre, est le quart du paramètre $2p'$, relatif à ce diamètre ; 5° connaissant donc les deux axes conjugués et le paramètre diamétral $2p'$, il en résulte le foyer,

la directrice et le paramètre principal ; 6° la distance du foyer à la tangente est moyenne proportionnelle entre le quart du paramètre $2p$ et le rayon vecteur du point de contact ; 7° soit d la distance au foyer du point d'où partent deux tangentes à la parabole, de longueurs t et t', depuis ce point jusqu'aux deux contacts, dont r et r' sont les rayons vecteurs : on aura $rt'^2=r't^2$, $d^2=rr'$ et par suite d est bisectrice de l'angle (rr') ; 9° si l'angle $(rr')=180°, r+r'$ est une corde, à laquelle d est perpendiculaire ; les deux tangentes aux extrémités de cette corde se coupent donc à angle droit sur la directrice ; d'où résultent plusieurs propriétés réciproques ; 10° enfin, quel est le lieu de tous les points tels, que la distance de chacun à l'origine soit l'abscisse de ce point augmentée de la longueur p donnée ?

Observons encore que, S étant le sommet de la parabole $y^2=2px$; si l'on prolonge l'abscisse SP du point M, de la longueur PN$=2p$ et NM de la longueur MN$'$ telle qu'on ait MN$'$=MN$\cdot v$, v étant un rapport constant ; le lieu géométrique de tous les points N$'$ est une seconde parabole. Mais si par chaque point M de la parabole proposée, on mène à l'axe principal des x, la parallèle égale au paramètre $2p$, puis du pied de l'ordonnée de l'extrémité de cette parallèle, une perpendiculaire à la corde SM ; suivant que la parallèle $2p$ sera dirigée vers les x positifs ou vers les x négatifs, le lieu du pied de la perpendiculaire sera la parabole proposée elle-même ou bien sera la courbe $(y^2+x^2)y^2=2px(x^2-y^2)$. La parallèle pourrait être SP ou MP, etc.

XVI. ELLIPSE. — Cherchons l'équation de la ligne décrite par les intersections successives de deux droites, mobiles autour de deux points fixes, de telle sorte que le produit de leurs directions variables n et n' soit un nombre donné k, constamment négatif.

Soit $2d$ la longueur connue de la droite joignant les deux points fixes ; plaçons au milieu l'origine des coordonnées *obliques*, comprenant l'angle θ, et soient (x',y') une extrémité de $2d$; l'autre extrémité sera $(-x',-y')$, puisque l'origine $(0,0)$ est le milieu de $2d$. Les équations des droites, mobiles autour de ces deux points, sont donc

$$y-y'=n(x-x') \text{ et } y+y'=n'(x+x').$$

Au point quelconque (x,y), où les deux droites se coupent, les x et les y ont mêmes valeurs respectives dans leurs équations. On peut donc multiplier celles-ci membre à membre, et à cause de $nn'=-k$, par hypothèse, il vient

$$y^2-y'^2=-k(x^2-x'^2) \text{ ou } y^2+kx^2=y'^2+kx'^2 \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Tout est positif, dans cette équation, évidemment de la forme $My^2+Nx^2=P$; donc *elle représente une ellipse.*

Le point quelconque (x,y) de la courbe restant fixe ; aussi bien que l'origine, milieu de $2d$, on peut, en déplaçant les axes autour de l'origine fixe, faire varier l'angle θ, depuis θ infiniment petit jusqu'à $\theta=180°$, k restant constant : il est clair que x' et y' varieront, en restant constants, pour une même valeur de θ ; l'équation (c) conservera toujours la même forme, sans cesser de représenter les mêmes points, et par conséquent la même ellipse ; laquelle est ainsi *rapportée à ses axes conjugués* des x et des y. De sorte que l'*ellipse admet une infinité de systèmes d'axes conjugués*, *des* x *et des* y, *et un seul système d'axes principaux, pour lequel l'angle* θ *est droit*. Dans ce cas, ayant $y'=0$ et $x'=d$, l'équation (c) devient $y^2+kx^2=kd^2$: elle représente la *circonférence*, si $k=1$; car alors $nn'+1=0$.

XVII. Hyperbole. Lorsque le produit $nn'=k$ est donné constant, mais toujours *positif*, l'équation (c) devient

$$y^2-kx^2=y'^2-kx'^2 \text{ ou } My^2-Nx^2=-P.$$

C'est donc l'*hyperbole*, *rapportée à ses axes conjugués*, des x et des y ; car cette équation conserve toujours la même forme, sans cesser de représenter les mêmes points M ou (x,y) et conséquemment la même courbe, lorsque l'angle θ varie, depuis 0 jusqu'à 180°. *Une même Hyperbole admet donc une infinité de systèmes d'axes conjugués des* x *et des* y, *et un seul système d'axes principaux, pour lequel l'angle* θ *est droit*. Dans ce cas, l'équation devient $y^2-kx^2=-kd^2$; et les axes principaux, des x et des y, sont en même temps *axes de symétrie* de la courbe, comme bisecteur chacun de toute *corde* qui lui est perpendiculaire.

De plus, si alors a et b sont les distances de l'origine aux points où la courbe rencontre ses axes de symétrie des x et des y, on aura $a^2=d^2$ et $b^2=-kd^2$. L'hyperbole rencontre donc l'axe principal des x aux deux points, extrémités fixes de $2d$; et voilà pourquoi $2a$ est dit le *premier axe*, l'*axe réel* ou l'*axe transverse* de l'hyperbole : elle ne rencontre point l'axe de symétrie des y, car $b=\pm d\sqrt{-k}$; la longueur *réelle* $2b=d\sqrt{k}$, sur l'axe principal des y, et dont le milieu est à l'origine, est dite le *second axe*, l'*axe imaginaire* ou *non transverse* de la courbe. Si $k=1$, d'où $2a=2b$, l'hyperbole est dite *équilatère* et son équation devient $y^2-x^2=-a^2$.

L'équation de l'hyperbole, aux *axes conjugués* ou aux *axes principaux*, conduit très-simplement, comme on sait, à toutes les propriétés, *descriptives* et autres, de la courbe ; en observant que,

quand l'hyperbole est équilatère, *ses asymptotes sont perpendiculaires entre elles, et réciproquement.*

Posons $\cos\theta = c$ et $\sin\theta = s$: si du point $(a,0)$, donné sur l'axe des x, on mène une oblique quelconque L à l'axe des y, puis du pied de celle-ci, la parallèle à l'axe des x, de longueur égale à L ; l'extrémité (x,y) de cette parallèle appartient à l'hyperbole

$$y^2 - x^2 + 2acy + a^2 = 0.$$

Prenant les valeurs de y, puis développant la racine carrée du binome $x^2 - a^2s^2$ ou $x^2 - m$, pour abréger, on aura

$$y = -ac \pm x \mp \left(\frac{m}{2x} + \frac{m^2}{8x^3} + \frac{m^3}{16x^5} + \text{etc.}\right).$$

Les équations des asymptotes de cette hyperbole sont donc

$$Y = -ac \pm x;$$

car x ayant la même valeur, croissante depuis 0 jusqu'à $\pm\infty$, dans les deux systèmes d'équations, la différence $Y - y$ diminue continuellement et devient infiniment petite, sans jamais devenir rigoureusement nulle. Ici l'hyperbole est *équilatère*, puisque ses deux asymptotes sont *perpendiculaires entre elles.* On voit d'ailleurs comment cette courbe peut se décrire, par points successifs. On aurait pu d'abord faire disparaître la première puissance de y. On peut examiner les deux cas de $\theta = 90°$ et $60°$, lorsque $a = 10$.

Enfin, lorsque par le point donné (a,a), on mène une suite illimitée de droites, dont on considère les portions entre les axes des x et des y rectangulaires ; si l'on cherche le lieu géométrique de tous les points tels, que chacun divise la portion de droite en deux parties dont celle adjacente à l'axe des x soit double de l'autre, on trouve encore une hyperbole équilatère ; mais l'équation est compliquée de facteurs étrangers, qu'il faut d'abord faire disparaître.

XVIII. SIMILITUDE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ. *Deux lignes du second ordre, du même genre et rapportées à un même système de coordonnées, sont semblables dès que les coefficients des termes du second degré, dans leurs équations, sont respectivement égaux.*

Pour démontrer ce théorème, on pourrait prendre les deux équations

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = Hx \text{ et } Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 = H'x'.$$

Mais il est plus simple de considérer les deux courbes, de même genre, représentées par les équations, aux *axes conjugués* :

$$y^2 = 2px + qx^2 \text{ et } y'^2 = 2p'x' + qx'^2.$$

Soit d'abord posé $2p'=2pr$: on peut toujours choisir, sur les deux courbes, les deux points (x,y) et (x',y') tels qu'on ait $x'=rx$; et alors, en vertu des deux équations, on aura $y'=ry$. Les deux points (x,y) et (x',y') se *correspondent* sur les courbes et sont dits *homologues*, parce que l'un étant donné, l'autre s'en déduit immédiatement ; vu que le rapport r de p' à p (dit *rapport de similitude*) est connu, aussi bien que p' et p. D'ailleurs la droite $y=nx$, menée de l'origine au premier point, passe par le second ; car ayant $y:x=y':x'$, il est clair qu'en désignant par n le rapport commun, on aura simultanément $y=nx$ et $y'=nx'$.

Soient d et d' les distances de l'origine, point homologue commun aux deux courbes, à chacun des deux points (x,y) et (x',y') : on trouve $d'^2=d^2r^2$ ou $d'=dr$. De sorte que les droites *homologues* d' et d sont dans le rapport r de similitude ; et il en est de même de tous les couples de droites homologues, menées de l'origine, telles que D' et D ; car on trouve aussi $D'=Dr$. Soient a et a' les arcs des deux courbes, interceptés par les deux couples d et D, d' et D' : si l'angle commun, entre d et D ou d' et D', est *infiniment petit*, les deux arcs a et a' seront infiniment petits eux-mêmes et conséquemment *rectilignes ;* les deux triangles résultants sont donc semblables ; et ainsi a' est parallèle à a et de plus $a'=ar$.

On voit que, dans les deux courbes proposées, des arcs *homologues*, c'est-à-dire terminés à des points homologues chacun à chacun, sont *semblables ;* comme lignes brisées composées du même nombre infini de côtés ou éléments homologues proportionnels, respectivement parallèles et comprenant des angles homologues égaux. Non-seulement ces deux arcs, dans le rapport r de similitude, sont semblables de *forme*, mais aussi de *position*, à raison du parallélisme des éléments homologues. Donc aussi les deux courbes proposées sont semblables, de forme et de position. Ce qu'il fallait démontrer.

Observons que les deux paraboles $y^2=2px$ et $y'^2=2p'x'$ sont toujours *semblables*, même lorsque les angles ne sont pas égaux dans les deux systèmes de coordonnées. Car la seconde peut toujours se rapporter au système de la première. Mais pour les deux autres genres, les deux courbes, de même nature, sont semblables dès que les coefficients des termes du second degré étant égaux chacun à chacun, les angles des deux systèmes de coordonnées sont égaux, quoique séparés.

Scholie. Lorsque deux courbes sont semblables, l'une *représente*

complètement l'autre, pour l'étude de leurs propriétés communes et pour les opérations *descriptives* ou de *mesurage*, qu'il serait impossible d'effectuer directement sur celle-ci, soit à cause de son étendue, soit à raison de divers obstacles sur le terrain, qui borneraient la vue ou qui empêcheraient d'agir; comme un bois, une rivière, etc. Le tracé d'une figure *semblable* à une autre a donc pour but de mettre celle-ci sous les yeux sur le papier, afin de l'étudier avec plus de facilité et plus complètement. Aussi les théories de la géométrie n'ont-elles lieu que sur des figures semblables ou supposées telles; mais dans la géométrie analytique, on simplifie encore en représentant les points et les lignes par des équations; ce qui dispense de tracer la figure et conduit à ses propriétés, par de simples transformations analytiques, beaucoup plus sûrement que si elle était sous les yeux. C'est ce que Descartes a mis en évidence le premier, comme on sait; et c'est ce que l'on reconnaîtra, pensons-nous, dans ce qui va suivre, où nous ne considérerons aucune figure tracée.

Enfin, comme l'étude de chaque ligne du second ordre porte toujours sur une ligne semblable, pouvant se tracer sur le papier, d'après différents procédés, que cette étude fait connaître; le théorème de la similitude des courbes du second degré doit suivre immédiatement leur distribution en trois genres distincts, pour l'ordre et la clarté des idées.

XIX. LES CONIQUES. Les trois courbes du second degré peuvent s'obtenir en coupant, par des plans différemment inclinés, toute surface conique circulaire, droite ou oblique, composée de deux *nappes;* et c'est pourquoi, la *parabole*, l'*ellipse* et l'*hyperbole* sont appelées *sections coniques* ou simplement *coniques*. Or, l'angle θ des coordonnées étant quelconque, on trouve aisément, d'après la trigonométrie, pour représenter les trois courbes

$$y^2=2px+qx^2 \quad . \; . \; . \quad (d)$$

Dans cette équation aux *axes conjugués* des x et des y, le premier étant un *diamètre* et le second, *tangent* à l'origine, les nombres p et q sont connus; et suivant que le coefficient q est *nul*, *négatif* ou *positif*, l'équation (d) représente une *parabole*, une *ellipse* ou une *hyperbole*, comme on l'a déjà démontré.

Soit a la distance de l'origine aux points où la courbe rencontre l'axe des x : on trouve $a=0$ et $qa=-2p$. La seconde distance n'existe pas, pour la parabole, où $q=0$; elle est positive ou négative, mais réelle, pour l'ellipse ou l'hyperbole; vu qu'alors q est un nombre

donné, négatif ou positif. Multipliant les deux membres par a, il vient l'équation *homogène*

$$ay^2 = 2p(ax - x^2).$$

L'équation (d), très-simple, faisant ressortir la grande analogie qui règne entre les trois courbes, peut servir utilement à l'étude de leurs propriétés ; puisque moyennant les modifications dues à la valeur et aux signes du coefficient q, les propriétés de l'une des trois courbes étant connues, on en déduit celles des deux autres. On pourrait commencer par la parabole ; mais, le coefficient q ayant disparu et ne se trouvant point dans les propriétés de cette courbe, il serait parfois assez difficile de bien connaître les modifications que la présence de ce coefficient doit amener dans ces propriétés, pour les deux autres courbes. Il est donc préférable de commencer par l'ellipse, parce que ses propriétés sont parfaitement *analogues* à celles de la circonférence, déjà connues.

Au surplus, l'équation (d), dans son état général, conduit immédiatement aux propriétés, communes aux trois courbes. D'abord cette équation fournit la propriété *caractéristique* de chaque courbe, ou propre à la *définir* et à la *décrire, en calculant le point* (x',y') *dont la distance* r, *à un point quelconque* (x,y) *de la courbe, soit* FONCTION RATIONNELLE *de l'abscisse* x *de ce point.* (Les coordonnées ici doivent être rectangulaires, pour plus de simplicité).

Calculant, d'après l'équation (d), *le lieu géométrique des milieux d'une suite de cordes parallèles, dans la courbe*, il en résulte les définitions de son *centre* et de ses *diamètres.* Il en résulte aussi l'équation de toute *tangente*, et cette équation, avec l'équation (d), sert à démontrer que *le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés sont tangents à une conique, décrit une circonférence*, qui devient la *directrice*, dans la parabole.

Pour ce théorème, l'angle θ doit être droit, de même que pour la recherche des *directrices* de toute conique : chaque directrice est une droite et le foyer voisin un point tels, qu'*en cherchant le lieu géométrique de tous les points, dont les distances de chacun au foyer et à la directrice soient dans un rapport constant,* on retrouve l'équation (d). Il en résulte une propriété, propre à décrire la courbe, quand on connaît trois de ses points, un foyer et la directrice voisine. De plus, *si un angle droit a pour sommet, l'un des foyers de toute conique ; la tangente au point où l'un des côtés coupe la courbe, va couper l'autre côté sur une directrice.*

Observons encore que les deux droites, menées des extrémités du diamètre, sur l'axe des x, aux extrémités de toute corde parallèle à l'axe conjugué des y, se coupent sur une autre conique.

Enfin, l'équation (d) servirait encore à établir les propriétés des *polaires* et des *pôles*, dans les coniques; mais, en général, l'étude des courbes du second degré se fait plus simplement, d'après l'équation aux axes conjugués, quand l'origine est au centre.

XX. PROJECTIONS ORTHOGONALES. Soit D la longueur d'une droite donnée dans l'espace et soit D' la *projection orthogonale* ou simplement la *projection* de D sur une autre droite, située ou non dans le même plan : si v désigne la mesure de l'angle compris, on démontre aisément que $D'=D \cos v$.

Soit F une aire plane quelconque, rectiligne, mixte ou curviligne, et soit F' sa projection sur un autre plan : si par un point de l'intersection des deux plans, on mène à celle-ci un plan perpendiculaire, il coupera F et F' suivant les deux droites *inscrites* D et D', dont l'angle v mesure le coin des deux plans proposés, et l'on a $D'=D \cos v$. Or, d'après la définition, la projection F' se trouve avec F absolument comme la projection D' se trouve avec D; donc puisque $D'=D \cos v$, on a aussi nécessairement $F'=F \cos v$.

Menant d'ailleurs un second plan perpendiculaire à l'intersection de deux plans de F et de F', et infiniment proche du premier, ce second plan coupera F et F' suivant les deux droites inscrites E et E', respectivement parallèles à D et à D'. Il est clair que D et E sont les bases d'un trapèze T, de hauteur h infiniment petite, lequel conséquemment est rectiligne; d'où $2T=h(D+E)$. De même, D' et E' sont les bases et h la hauteur du trapèze rectiligne T', projection de T; d'où $2T'=h(D'+E')=h(D+E) \cos v=2T \cos v$ et $T'=T \cos v$. Or, F est la somme de tous les T et F' celle de tous les T'; donc puisque $\cos v$ est constant, il vient $F'=F \cos v$.

On voit que *la projection est toujours le produit de la grandeur projetée multipliée par le cosinus numérique de l'angle compris.*

XX. BUT DE CE MÉMOIRE. Les propriétés de la circonférence, qui n'est qu'une *particularité* de l'ellipse, conduisent immédiatement aux propriétés de cette dernière courbe, ou du moins les font prévoir; surtout quand on regarde l'ellipse comme la *projection* de la circonférence, ainsi que plusieurs géomètres l'ont pratiqué, pour quelques propriétés faciles. Dans le tome VIII de la *correspondance* Mathématique et Physique, dans les notes de géométrie, 2me édition et dans le traité de géométrie analytique (en

1837), les projections nous ont servi à établir plusieurs beaux théorèmes sur l'ellipse ; mais notre travail était incomplet. Le but spécial du présent Mémoire est de démontrer un grand nombre de propriétés de l'ellipse, d'après les méthodes les plus élémentaires.

Propriétés de l'Ellipse.

I. Axes principaux. Considérons la circonférence dont a est le rayon. Si nous faisons tourner le cercle autour de son diamètre horizontal fixe $2a$, pris pour axe des x rectangulaires, jusqu'à ce que le nouveau plan fasse avec le premier un angle v, moindre que 90° ; les pieds des perpendiculaires abaissées de tous les points de la circonférence, fixée dans la seconde position, déterminent, sur le premier plan, une courbe fermée et rentrante sur elle-même, *projection* de la circonférence proposée C. D'abord cette projection E a le même *centre* que C, puisque chaque diamètre $2a$ de C a pour projection une *corde* $2d$ de E, divisée en deux parties égales par le centre de C; de sorte que $2d$ est un *diamètre* de la courbe E. Ensuite, si b est la projection du rayon a, perpendiculaire à l'axe des x communs; les axes des y rectangulaires, dans les deux courbes, sont dirigés suivant le rayon a et sa projection b. Or, v est nécessairement l'angle compris entre a et b; donc $b=a\cos v$. De même, si Y et y' sont les ordonnées de C et de E, pour la même abscisse x,y sera la projection de Y et v l'angle compris : donc $y=\mathrm{Y}\cos v$. D'ailleurs $\mathrm{Y}^2+x^2=a^2$; ainsi $y^2+x^2\cos^2 v=a^2\cos^2 v$, d'où à cause de $b=a\cos v$, il vient

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \quad . \; . \; . \; (1)$$

Cette équation ayant lieu, quel que soit le point (x,y) de la projection E, la *représente* complètement et peut servir à la décrire. D'abord $x=0$ donne $y=\pm b$, et $y=0$ fournit $x=\pm a$; de sorte que $2a$ et $2b$ sont deux diamètres rectangulaires, situés sur les *axes de symétrie* des x et des y : ce sont les *axes principaux* ou simplement les *axes* de la courbe E. De plus, à cause de $b=a\cos v$ et de $\cos v<1$, on a $b<a$ ou $2b<2a$; ainsi $2a$ est le *grand axe* et $2b$ le *petit axe* de la courbe.

Rien n'empêche de poser $c^2=a^2-b^2$: le nombre c aura deux valeurs réelles, égales et de signes contraires, mais chacune $<a$. Prenant alors sur l'axe des x, de part et d'autre de l'origine O, centre de C et de E, deux longueurs égales à c; les deux points

résultants F et F' tomberont sur le grand axe $2a$. Si donc r et r' sont les droites joignant F et F' à un point quelconque (x,y) de la courbe E ; les deux triangles rectangles donnent

$$r^2 = y^2 + (x-c)^2 \text{ et } r'^2 = y^2 + (x+c)^2.$$

Dans ces deux équations (1), les x et les y ont mêmes valeurs respectives ; il en résulte donc

$$r = a - \frac{cx}{a} \text{ et } r' = a + \frac{cx}{a}\text{ ; d'où } r + r' = 2a.$$

On appelle *ellipse* une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes F et F' est constamment égale à une droite donnée $2a$; donc la projection E est une ellipse, dont F et F' sont les *foyers*, c l'*excentricité*, r et r' les *rayons vecteurs* d'un point quelconque (x,y) de la courbe. Connaissant donc les deux axes $2a$ et $2b$, de longueur et de position, il en résulte les deux foyers et la description de l'ellipse E, soit par *points* soit d'un *mouvement continu*.

2. Diamètres. Deux droites parallèles et leurs milieux, ayant pour projections respectives deux parallèles et leurs milieux ; on voit que tout diamètre $2a$ du cercle, évidemment *bisecteur* d'une suite de *cordes* parallèles entre elles et aux *tangentes* à ses extrémités, a pour projection un diamètre $2d$ de l'ellipse, lui-même *bisecteur d'une suite de cordes parallèles entre elles et aux tangentes à ses extrémités*. Car le contact et la tangente au cercle ont nécessairement pour projections le contact et la tangente à l'ellipse. Or, on a $2d = 2a \cos v'$; et comme le maximum ou le minimum de l'angle v' est v ou 0, il est clair au contraire que le minimum ou le maximum du diamètre $2d$ est $2b$ ou $2a$. Ainsi *les deux axes de l'ellipse sont l'un le plus petit et l'autre le plus grand de tous ses diamètres*.

3. Équations aux axes conjugués. Prenons deux diamètres rectangulaires de la circonférence C pour axes des coordonnées X et Y ; ils auront pour projections deux diamètres $2a'$ et $2b'$, axes des x et des y *obliques*, de l'ellipse E. Soit (X,Y) un point quelconque de C, d'où $X^2 + Y^2 = a^2$; ce point a pour projection le point (x,y) de E. Or, a et X, sur une même droite, ont pour projections a' et x, sur une même droite ; donc $a:a' = X:x$. De même, Y et sa projection y sont respectivement parallèles au rayon a et à sa projection b' ; donc $a:b' = Y:y$. Prenant dans ces proportions, les

valeurs de X et de Y, puis substituant dans $X^2+Y^2=a^2$, on trouve

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Comme le point (x,y) de E est ici quelconque, les équations (1) et (2) *représentent* chacune l'ellipse E. Ces équations ont absolument la même forme, quel que soit, dans la seconde, l'angle θ; et dans celle-ci les axes des coordonnées sont dits *conjugués*, parce qu'ils vont toujours ensemble et que l'un étant tracé, l'autre s'en déduit immédiatement. De plus, dans l'équation (2), les diamètres $2a'$ et $2b'$, sur les axes conjugués des x et des y, sont dits eux-mêmes *diamètres conjugués;* ainsi *deux diamètres rectangulaires quelconques de la circonférence* C *ont toujours pour projections deux diamètres conjugués de l'ellipse* E. Celle-ci admet donc une infinité de systèmes de diamètres conjugués, dont un seul rectangulaire, celui des deux axes $2a$ et $2b$.

4. Paramètres. En général, l'angle θ des coordonnées étant quelconque, toute équation de la forme $My^2+Nx^2=P$ représente une ellipse, rapportée à ses diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$; car $y=0$ dans cette équation donne $Na'^2=P$ et $x=0$ fournit $Mb'^2=P$; d'où en substituant dans cette équation les valeurs de M et de N, savoir P sur b'^2 et P sur a'^2, il vient l'équation (2). Celle-ci, en y changeant x en $x-a'$, et posant $a'p=b'^2$, $a'^2q=b'^2$, devient

$$y^2=2px-qx^2=px(2a'-x) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

C'est l'équation au *paramètre diamétral* $2p$, donné par la proportion $2a':2b'::2b':2p$. Dans l'équation (1) de l'ellipse, le *paramètre* $2p$ est la double ordonnée dont le pied tombe au foyer F; c'est une troisième proportionnelle aux deux axes $2a$ et $2b$.

5. Cordes supplémentaires I. Dans les lignes du second ordre, les cordes menées des extrémités d'un même diamètre à un point quelconque de la courbe, sont dites *cordes supplémentaires*. Or, il est évident que les deux diamètres rectangulaires de C sont bisecteurs de deux cordes supplémentaires, respectivement parallèles à eux et aux tangentes à leurs extrémités; donc aussi *les deux diamètres conjugués* 2a' *et* 2b' *sont bisecteurs des deux cordes supplémentaires de l'ellipse* E, *respectivement parallèles à eux et aux tangentes à leurs extrémités*. Les deux cordes comprennent donc un angle égal et opposé à celui des deux diamètres. Si donc l'ellipse E et un diamètre sont tracés; en décrivant sur celui-ci un segment capable de l'angle donné α, les deux diamètres respectivement

parallèles aux deux cordes supplémentaires menées à l'un des points d'intersection de l'arc du segment avec l'ellipse, sont conjugués et comprennent l'angle donné α. Si cet angle est droit, on a les deux axes $2a$ et $2b$.

II. L'angle des deux cordes supplémentaires du cercle, menées des extrémités du grand axe $2a$, étant droit, sa projection, angle des deux cordes supplémentaires de l'ellipse, menées des deux mêmes extrémités, est nécessairement obtus et le plus grand possible lorsque les deux cordes se coupent à une extrémité de $2b$; car l'axe du segment capable du premier angle obtus, arc décrit sur la corde $2a$, rencontre le prolongement de b. On verra de même que l'angle compris entre les deux cordes supplémentaires menées des extrémités du petit axe $2b$, est toujours aigu et le moindre possible lorsque les deux cordes se coupent à une extrémité de $2a$. Or, les extrémités des deux axes $2a$ et $2b$, s'appellent les *sommets* de l'ellipse E : il y a donc quatre sommets de la courbe, en même temps sommets d'un *losange inscrit*, dont les côtés sont les *cordes* des sommets de l'ellipse. Ce *losange des sommets*, ayant les deux axes $2a$ et $2b$ pour diagonales, est la moitié du *rectangle circonscrit*, touchant la courbe aux quatre sommets. Celui-ci ayant ses côtés respectivement égaux et parallèles à $2a$ et $2b$, est dit le *rectangle des axes*, et son aire a pour mesure $4ab$. Il est clair d'ailleurs que le rectangle des axes et le losange des sommets sont les projections respectives du carré circonscrit, touchant le cercle aux extrémités du grand axe $2a$, et du carré inscrit, joignant les contacts du premier.

III. Les diagonales du rectangle des axes, étant respectivement parallèles aux cordes supplémentaires des sommets et les divisant en deux parties égales chacune, ont sur elles deux diamètres conjugués, égaux évidemment et comprenant l'angle obtus maximum ou l'angle aigu minimum. Car ces deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, projections des deux diamètres rectangulaires du cercle (dirigés suivant les diagonales du carré circonscrit, dont le rectangle $4ab$ est la projection) font avec ces diamètres, deux angles égaux à v'; d'où $a'=a\cos v'$ et $b'=a\cos v'$. Cela donne $2a'=2b'$ et l'équation (2) de l'ellipse E devient $y^2+x^2=a'^2$.

IV. Soient d'ailleurs n et n' les directions des cordes supplémentaires menées des extrémités du grand axe de l'ellipse E : on trouve aisément $a^2nn'+b^2=0$. Il est clair que n et n' sont aussi les directions des deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, respectivement paral-

lèles à ces deux cordes ; le produit nn' est donc constant et négatif. Et comme la relation $a^2nn'+b^2=0$ est unique, on voit que *tout diamètre de l'ellipse a son conjugué et n'en a qu'un seul*, ce diamètre étant bisecteur d'un seul système de cordes parallèles. De sorte que le centre et les milieux d'une suite de cordes parallèles sont en ligne droite. Donc l'ellipse E étant tracée, *les droites passant par les milieux de deux couples de cordes parallèles, se coupent au centre.* De plus, dans un système de cordes parallèles, les cordes à égales distances du centre de part et d'autre, sont égales entre elles ; et plus une corde est éloignée du centre, plus elle est petite.

V. Observons encore que tout diamètre divise l'ellipse en deux parties *superposables* et *symétriques* par rapport au centre ; tandis que deux diamètres quelconques de la courbe divisent toute corde, parallèle à celle qui joint leurs extrémités, en trois parties dont les deux extrêmes sont égales entre elles. Observons enfin que la plus petite corde, menée par un point donné dans l'intérieur de l'ellipse, est parallèle au conjugué du diamètre passant par ce point ; ce dernier diamètre étant lui-même la plus grande corde en ce point donné.

6. Relations des diamètres avec les axes. Soient n et n' les directions de deux diamètres quelconques $2a'$ et $2b'$ de l'ellipse E, dont $2a$ et $2b$ sont les axes, sur ceux de symétrie des x et des y. Pour l'extrémité (x,y) de a', on a les trois équations simultanées

$$y=nx,\ a'^2=x^2+y^2 \text{ et } a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Éliminant x et y de ces équations et opérant de même pour b', on trouve

$$\left.\begin{aligned}(a^2n^2+b^2)a'^2&=a^2b^2(1+n^2),\\(a^2n'^2+b^2)b'^2&=a^2b^2(1+n'^2).\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (4)$$

Ces deux relations remarquables serviront à calculer les diamètres $2a'$ et $2b'$, dès que leurs directions n et n' seront données, avec les axes, et réciproquement, en observant qu'on ne saurait avoir $n=n'$.

7. Diamètres égaux. Si $n'=-n$, il est clair qu'on aura $a'=b'$; réciproquement, si $a'=b'$, les relations (4), divisées l'une par l'autre, donneront ensuite

$$(a^2-b^2)(n'-n)(n'+n)=0\text{ ; d'où } n'=-n.$$

Comme la direction n reste encore tout-à-fait arbitraire, on voit que *l'ellipse admet une infinité de couples de diamètres égaux, également inclinés sur le grand axe, de part et d'autre du petit.* Il

existe par conséquent une infinité de *rectangles inscrits*, dont les côtés sont parallèles aux deux axes ; et parmi ces rectangles, un seul *carré inscrit*, ayant ses diagonales égales et perpendiculaires entre elles, leurs directions étant par suite $n=1$ et $n'=-1$.

8. Diamètres rectangulaires. Pour que les diamètres $2a'$ et $2b'$ soient perpendiculaires l'un à l'autre, il faut que leurs directions n et n' satisfassent à la relation $nn'+1=0$. Cette relation est unique et laisse entièrement indéterminée n' ou n, vu que les relations (4) ne donnent a' et b' que quand n et n' sont connues ; ainsi l'*ellipse admet une infinité de couples de diamètres rectangulaires, diagonales d'une infinité de losanges incrits, concentriques.*

De plus, soit z l'hypoténuse du triangle dont a' et b' sont les deux autres côtés, et soit h la hauteur menée de l'angle droit : on aura simultanément $hz=a'b'$ et $z^2=a'^2+b'^2$. Par ces deux relations, on voit d'abord que 1 sur h^2 vaut 1 sur a'^2+1 sur b'^2 ; mais cette dernière somme vaut 1 sur a^2+1 sur b^2, en vertu des relations (4), où l'on substitue, au lieu de n' sa valeur -1 sur n ; donc

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

Cette double relation est indépendante de n et s'applique encore au losange des sommets ; de sorte que *h est le rayon du cercle inscrit dans tous les losanges, inscrits eux-mêmes dans l'ellipse proposée* E *et tous concentriques avec elle, dont un seul carré.*

9. Diamètres conjugués I. Si n et n' sont les directions de deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, on aura la relation unique $a^2nn'+b^2=0$; et alors les relations (4) deviendront, en éliminant $b^2=-a^2nn'$:

$$(n'-n)a'^2=a^2n'(1+n^2),$$
$$(n'-n)b'^2=-a^2n(1+n'^2).$$

Combinant ces deux égalités par addition et multiplication, puis désignant par s le sinus de l'angle θ entre les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, d'où $(1+n^2)(1+n'^2)s^2=(n'-n)^2$, ainsi qu'on le vérifie par $s=\sin(\alpha'-\alpha)$, $n=\text{tang}\ \alpha$ et $n'=\text{tang}\ \alpha'$; il est clair qu'on trouvera

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2 \text{ et } a'b's=ab \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

II. Ces relations sont importantes et la première, qui revient à $4a'^2+4b'^2=4a^2+4b^2$, nous apprend que, *dans l'ellipse, la somme des carrés faits sur deux diamètres conjugués quelconques, vaut la*



somme des carrés faits sur les deux axes et se réduit au carré construit sur la double corde 2z *des sommets.*

III. Quant à la seconde relation $4a'b's=4ab$, comme les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles à son conjugué (5), les quatre tangentes aux extrémités de $2a'$ et $2b'$ forment un parallélogramme P *circonscrit*, dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles à $2a'$ et $2b'$; ils comprennent donc l'angle dont s est le sinus ; de sorte que l'aire $P=4a'b's=4ab$. On voit que, *dans l'ellipse, le parallélogramme circonscrit, ayant ses côtés respectivement égaux et parallèles à deux diamètres conjugués quelconques, vaut le rectangle des deux axes.*

IV. Le parallélogramme P circonscrit est dit *conjugué*, pour le distinguer de tout autre parallélogramme circonscrit, formé par les quatre tangentes aux extrémités de deux diamètres quelconques; lequel ne jouit pas des mêmes propriétés que P. D'ailleurs, tout carré $4a^2$ circonscrit au cercle C a évidemment pour projection un parallélogramme conjugué P; donc $P=4a^2 \cos v=4ab$. De plus, tout parallélogramme P' circonscrit au cercle C a pour projection un parallélogramme P circonscrit à l'ellipse, d'où $P=P' \cos v$. Or, P' est le moindre possible dès qu'il est le carré $4a^2$; donc P sera aussi le moindre possible et vaudra $4ab$. *Le parallélogramme conjugué est donc le plus petit de tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse*, ce parallélogramme conjugué pouvant être le rectangle des deux axes.

V. Observez d'ailleurs que la somme des carrés faits sur les diagonales de tout parallélogramme conjugué vaut le double carré fait sur la double corde des sommets ; tandis que si les deux diamètres conjugués sont égaux, le carré fait sur l'un est double du carré fait sur la corde des sommets. D'ailleurs les directions n et n' des deux diamètres conjugués égaux sont données par $an=b$ et $an'=-b$; elles sont donc respectivement les mêmes que les directions des diagonales du rectangle des deux axes.

VI. Soit z la corde des sommets, d'où $z^2=a^2+b^2$; les relations (5) deviennent donc

$$(a'+b')^2=z^2+2ab:s \text{ et } 2ab:s=z^2-(a'-b')^2.$$

Les nombres a, b, z, sont constants, tandis que les nombres s, a', b' sont variables; donc si $a'=b'$, s est un *minimum* et $a'+b'$ un *maximum* égal à $z\sqrt{2}$. De plus, on voit que les deux diamètres conjugués égaux comprennent le plus petit angle aigu ou le plus

grand angle obtus. Enfin, le *maximum* du sinus s étant le rayon 1, on voit au contraire que le *minimum* de $a'+b'$ est $a+b$.

VII. Soient (X,Y) et (X′,Y′) les extrémités de deux diamètres rectangulaires de la circonférence C ; elles ont pour projections les extrémités (x,y) et (x',y') des deux demi-diamètres conjugués a' et b' de l'ellipse E. Or, il est aisé de voir que $X=Y'$, et $Y=X'$; donc les deux rectangles XY et X′Y′ sont égaux : ils ont pour projections les parallélogrammes faits sur x et y, sur x' et y'; donc *ces deux parallélogrammes sont équivalents*. De plus, les coordonnées étant rectangulaires, dans C et E, on a $x=X$, $x'=X'$, $y=Y\cos v=X'\cos v$ et $y'=Y'\cos v=X\cos v$. D'ailleurs $a^2=X^2+Y^2=X^2+X'^2$; donc $a^2=x^2+x'^2$, et par suite $b^2=y^2+y'^2$. Ces deux théorèmes remarquables fournissent la relation $a'^2+b'^2=a^2+b^2$.

10. ÉQUATIONS DE LA TANGENTE A L'ELLIPSE. L'angle des coordonnées étant quelconque, dans l'ellipse E, rapportée à ses diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, il est bien facile de calculer l'équation de sa tangente, d'après celle de la tangente au point (X′,Y′) de la circonférence C. D'abord en ce point, il n'y a que la seule tangente $YY'+XX'=a^2$; donc au point (x',y') de l'ellipse, il n'y a que la seule tangente $y=nx+h$. D'ailleurs a et X′, situés en ligne droite, ont pour projections a' et x', aussi en ligne droite ; donc $a:a'=X':x'$. De même, Y′ et sa projection y' sont respectivement parallèles à a et à sa projection b'; donc $a:b'=Y':y'$. On a donc les quatre relations simultanées :

$$ax'=a'X',\ ay'=b'Y',\ ax=a'X \text{ et } ay=b'Y.$$

Par ces relations et en substituant dans $YY'+XX'=a^2$, l'équation de la tangente à l'ellipse, au point (x',y'), devient

$$a'^2yy'+b'^2xx'=a'^2b'^2 \quad . \; . \; . \; (6)$$

C'est d'ailleurs ce qu'on trouverait en éliminant y' des deux équations simultanées $a'^2y'^2+b'^2x'^2=a'^2b'^2$ et $y'=nx'+h$, puis en observant que les deux valeurs de x', dans l'équation finale, sont égales entre elles, comme devant se réduire à une seule. Cette condition fournit les deux relations

$$a'^2n^2+b'^2=h^2 \text{ et } a'^2ny'=-b'^2x' ;$$

lesquelles réduisent à (6) l'équation de la tangente $y=nx+h$, mise sous la forme $y-y'=n(x-x')$. Si les cordonnées sont rectangulaires, a' et b' se changent en a et b.

Enfin, comme d'un point donné hors de la circonférence, on

peut mener deux tangentes à cette courbe ; de même, il y a deux tangentes à l'ellipse qui partent d'un point donné au-dehors. Il est clair d'ailleurs que les tangentes à l'ellipse et au cercle, étant la première projection de la seconde, rencontrent au même point T l'axe des x rectangulaires ; elles ont donc la même *soutangente* TP, P étant le pied commun des deux ordonnées y' et Y' ; d'où $x' \cdot TP = a^2 - x'^2$. Delà *le moyen de mener la tangente à l'ellipse* E, *par un point donné sur cette courbe ;* mais le suivant est préférable.

11. Construction de la tangente. Les deux foyers F et F' sont utiles, non-seulement pour décrire l'ellipse E, dont on connaît le grand axe $2a$; mais aussi pour lui mener une tangente GT, par un point donné M sur cette courbe. En effet, le point M étant sur l'ellipse, on a, d'après la définition, $MF + MF' = 2a$; tandis que le point G de la tangente GT étant hors de l'ellipse, on a $GF + GF' > 2a$. Le point M de GT est donc tel que la somme de ses distances aux deux foyers F et F' est la moindre possible ; donc (géométrie) l'angle $FMT = F'MG$. Soient d'ailleurs v et v' les deux angles FMT et F'MT : on trouve $cy' \tang v = b^2$ et $cy' \tang v' = -b^2$; donc $v = 180° - v' = F'MG$. Ainsi *dans l'ellipse, les rayons vecteurs du point* M *de contact font avec la tangente* GT *et d'un même côté, deux angles égaux* (delà vient la dénomination de *foyer* donné à chacun des points F et F'). Donc *pour tracer la tangente au point* M, *il suffit de mener la bisectrice du supplément de l'angle* FMF'.

Cette construction montre aussi comment on peut mener les deux tangentes à l'ellipse, soit par un point donné au-dehors, soit parallèles ou perpendiculaires à une droite donnée ; et il en résulte les théorèmes, faciles à démontrer, que voici :

I. La circonférence décrite sur le grand axe $2a$, comme diamètre, coupe la tangente aux pieds des perpendiculaires P et P', abaissées sur elle des deux foyers F et F'.

II. Le demi-second axe b est moyen proportionnel entre ces deux perpendiculaires ; de sorte que $PP' = b^2$.

III. La droite, passant par le foyer et partant du point de contact M, extrémité d'un diamètre MOM', est égale au grand axe $2a$, quand on la termine à la tangente en M', les deux tangentes en M et en M' étant d'ailleurs parallèles entre elles. Il y a toujours quatre de ces deux droites, se coupant deux à deux aux foyers F et F'.

IV. On peut toujours décrire l'ellipse dont on connaît un diamètre et la longueur du grand axe, si l'on a la tangente à une extrémité de ce diamètre.

V. On peut sans connaître les axes d'une ellipse tracée, lui mener une tangente, soit en un point donné, soit parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée.

VI. La portion de toute tangente à l'ellipse, entre les deux tangentes aux extrémités du grand axe $2a$, est le diamètre de la circonférence passant par les deux foyers. De plus, Y et Y' désignant les ordonnées de la première tangente, qui ont leurs pieds aux extrémités de $2a$, on a $b^2=YY'$. Et si d et d' sont les distances d'un foyer aux extrémités de $2a$, on aura $b^2=dd'$.

12. DESCRIPTION DE L'ELLIPSE. I. On peut toujours décrire, *par points successifs*, l'ellipse dont on a l'équation numérique ; mais le calcul des coordonnées successives est beaucoup plus compliqué que quand la courbe est rapportée à ses axes principaux, où alors on a les deux foyers et où d'ailleurs la description peut se faire par un mouvement continu. Pour décrire l'ellipse, dont on a l'équation numérique, il faut donc calculer d'abord ses deux axes ou les construire. La chose est facile quand l'ellipse est rapportée à ses deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, donnés et tracés ; et il y a, pour cet effet, deux procédés, également très-simples.

1° Les relations (5), combinées par addition et soustraction, après avoir doublé la seconde, donnent celles-ci :

$$(a+b)^2=a'^2+b'^2+2a'b's=d^2,$$
$$(a-b)^2=a'^2+b'^2-2a'b's=d'^2.$$

Les seconds membres seront toujours positifs, vu que le sinus $s<1$ et que $a'^2+b'^2>2a'b'$; dont les deux droites d et d' seront toujours réelles. Soit v le complément de l'angle θ des deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, d'où $s=\cos v$; d et d' sont donc les troisièmes côtés des deux triangles t et t', dont a' et b' sont les deux autres côtés donnés, les angles compris étant $180°-v$ dans t et v dans t'. D'après la trigonométrie, les côtés d et d' se calculent aisément par logarithmes; mais on peut construire immédiatement d et d'.

Soit O le centre de l'ellipse E, où $OA=a'$ et $OB=b'$. Menons BK perpendiculaire à OA, d'où $BK=b's$; sur les prolongements de BK, prenons $BD=BKC=a'$: il en résulte $OD=d=a+b$ et $OC=d'=a-b$; donc $2a=OD+OC$ et $2b=OD-OC$.

2° Soient X et Y les distances du centre O aux points où la tangente $a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2$ rencontre les deux axes prolongés, d'où $Xx'=a^2$ et $Yy'=b^2$; soient s et s' les distances de ces deux points

au contact (x',y'), extrémité du diamètre $2a'$, son conjugué $2b'$ étant parallèle à la tangente. On a donc simultanément

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,\ (s+s')^2=X^2+Y^2,\ s^2=y'^2+(X-x')^2.$$

$$\text{et } s'^2=x'^2+(Y-y')^2\ ;\ \text{d'où } ss'=b'^2.$$

La circonférence décrite sur $s+s'$, comme diamètre, passe par le centre O ; et si d désigne le prolongement de a' jusqu'à la circonférence, on aura $da'=ss'=b'^2$. La longueur d étant ainsi connue, aussi bien que la droite $d+a'$, il est clair que la perpendiculaire au milieu de celle-ci va couper la parallèle à $2b'$, menée par l'extrémité (x',y') de a', au centre H de la circonférence proposée, ayant HO pour rayon et interceptant $s+s'$ sur la parallèle tangente. De sorte que les distances X et Y, directions des deux axes $2a$ et $2b$, sont déterminées entièrement, aussi bien par suite que x' et y'. Ayant ainsi les directions des deux axes, on calculera ou construira leurs longueurs par $a^2=Xx'$ et $b^2=Yy'$. On aura donc aussi les deux foyers F et F' et l'on pourra décrire ensuite l'ellipse E. (Ce second procédé très-simple est peu connu : il s'applique à la description de l'*hyperbole*).

II. L'ellipse E étant la projection de la circonférence, il en résulte, pour *décrire l'ellipse circonscrite à un pentagone convexe donné*, ce théorème : Si dans l'ellipse, deux sécantes, qui se coupent, sont respectivement parallèles à deux autres sécantes qui se coupent, et si l'on multiplie entre eux les deux segments d'une même sécante, depuis le point commun jusqu'à la courbe ; les produits fournis par les deux premières sécantes sont proportionnels aux produits fournis par les deux dernières.

Cette propriété fait connaître, de longueurs et de position, deux diamètres conjugués de l'ellipse circonscrite cherchée.

En général, l'équation complète du second degré n'ayant au fond que cinq coefficients arbitraires ; ceux-ci étant connus, déterminent la courbe complètement. *La construction d'une ligne du second ordre exige donc, au plus, cinq données ou cinq conditions distinctes ;* et ainsi l'on peut décrire l'ellipse inscrite dans un pantagone convexe tracé, laquelle est unique.

III. Lorsque l'ellipse E est rapportée à deux diamètres quelconques, son équation est de la forme

$$Ay^2+Bxy+Cx^2=1\ ,\ .\ .\ .\ (7)$$

A, B, C étant des nombres donnés, le premier et le dernier positifs. Soit d un demi-diamètre quelconque, p le cosinus et s le sinus de l'angle des coordonnées ; on a donc

$$y=nx \text{ et } d^2=x^2+y^2+2pxy.$$

Ici x et y sont les coordonnées de l'extrémité de d et leurs valeurs sont respectivement les mêmes, dans les trois équations. Éliminant donc x et y, on aura une équation finale du second degré, ne contenant plus que les deux variables n et d. Or, les deux axes de l'ellipse sont l'un le plus grand et l'autre le plus petit de tous ses diamètres (2); pour calculer les deux axes $2a$ et $2b$, il faut donc résoudre l'équation finale par rapport à n. Observant alors que le maximum et le minimum de d rendent nulle la quantité sous le radical de n, on aura, pour calculer ce maximum a et ce minimum b, l'équation

$$(4AC-B^2)d^4-4(A+C-Bp)d^2+4s^2=0.$$

Donc puisque a^2 et b^2 sont les deux racines de cette équation, on a

$$(4AC-B^2)(a^2+b^2)=4(A+C-Bp) \text{ et } (4AC-B^2)a^2b^2=4s^2 \ldots (8)$$

Ces deux relations serviront à calculer $2a$ et $2b$; lesquels sont nécessairement les deux axes, puisque leurs directions n et n' satisfont à la condition de perpendicularité, savoir $1+nn'+(n+n')p=0$. On sait d'ailleurs que ces deux axes sont ceux de l'*ellipse* ou de l'*hyperbole*, suivant que $4AC-B^2$ est positif ou négatif; et si les coordonnées sont rectangulaires, on aura $p=0$ et $s=1$. Si $B=0$, les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$ seront donnés par $Ca'^2=1$ et $Ab'^2=1$; d'où $a'^2+b'^2=a^2+b^2$ et $a'b's=ab$.

IV. Lorsque l'ellipse est représentée par l'équation complète, du second degré entre les deux variables x et y; on la ramène d'abord à la forme (7), en passant du système proposé à un autre parallèle, pour faire disparaître les premières puissances de x et de y. Par exemple, proposons-nous de *décrire la courbe passant par les cinq points donnés* (0,1), (0,2), (2,0), (3,0) et $(1,\frac{1}{2})$, *les coordonnées étant rectangulaires.*

Substituant dans l'équation du second degré complète

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0;$$

on aura cinq équations, du premier degré chacune, pour calculer les six coefficients inconnus A, B, C, D, E, F; et la courbe cherchée sera représentée par

$$3y^2+2xy+x^2-9y-5x+6=0.$$

Faisant disparaître les premières puissances de x et de y, la même courbe est représentée par

$$12y^2+8xy+4x^2=9.$$

Ici $A=\frac{12}{9}$, $B=\frac{8}{9}$, $C=\frac{4}{9}$, $p=0$ et $s=1$; donc les relations (8) deviennent

$$2(a^2+b^2)=9 \text{ et } 32a^2b^2=81.$$

Il en résulte, d'une manière aussi rapprochée qu'on veut, les deux axes $2a$ et $2b$ de l'ellipse cherchée. On connaît d'ailleurs le centre à la nouvelle origine, et les directions des deux axes ; on peut donc aisément décrire l'ellipse demandée. Les longueurs des demi-diamètres rectangulaires d et d', auxquels elle est rapportée, sont données par $4d^2=9$ et $12d'^2=9$.

V. Observons enfin que, dans l'équation complète, on peut, en la résolvant par rapport à y, en déduire l'équation $6Y=-2x+9$ d'un diamètre $2a'$, facile à construire, par $x=0$ et $Y=0$. Les extrémités de $2a'$ sont données par les valeurs de x, qui rendent nul le radical de y, savoir $4x=6\pm\sqrt{6}$; d'où $12y=12\mp\sqrt{6}$. Aux extrémités de $2a'$, ainsi déterminées, les deux ordonnées sont tangentes à la courbe ; donc la parallèle à l'axe des ordonnées, menée par le milieu de $2a'$; c'est-à-dire par le *centre* de l'ellipse, est la direction du diamètre $2b'$, conjugué de $2a'$. Substituant dans l'équation complète la valeur de l'abscisse du centre, savoir $x=\frac{3}{2}$, on aura les ordonnées des extrémités de $2b'$, savoir $y=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. On connaît donc, de position et de longueur, chacun des deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$; et ainsi l'on peut décrire l'ellipse. Les longueurs sont $2a'=\frac{1}{3}\sqrt{15}$ et $2b'=\sqrt{3}$; vu que les coordonnées étant rectangulaires, $2a'$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ et $\frac{1}{6}\sqrt{6}$ sont les autres côtés ; tandis que $2b'$ est la différence des ordonnées de ses extrémités.

VI. Tels sont les divers procédés pour décrire l'ellipse, dont l'équation est donnée numériquement. Mais on peut quelquefois simplifier les calculs, comme dans le problème : *Les coordonnées rectangulaires de chaque point du plan sont les dimensions d'un rectangle variable* R ; *quel est le lieu géométrique de tous ces points,* 1° *lorsque le carré de la diagonale de* R, *plus l'aire du rectangle, donne le carré* 36 ? 2° *lorsque le carré de la diagonale, plus ou moins le double rectangle, donne* 64 ? 3° *enfin, lorsque* 4 *fois l'aire du rectangle, moins le carré de sa diagonale, fournit le carré* 100 ?

Dans le premier cas, on a $x^2+y^2+xy=36$ et $x^2+y^2=d^2$. On trouve aisément, pour le maximum de d^2, $y=-x$ et $a^2=72$; pour le minimum de d^2, $y=x$ et $b^2=24$. Le lieu cherché est donc une ellipse, facile à décrire, puisque l'on connaît ses deux axes $2a$ et $2b$, bisecteurs des angles droits des axes des coordonnées.

13. NORMALE I. Toute *normale* à l'ellipse est perpendiculaire à la tangente, au point de contact ; *la normale est donc bisectrice de l'angle compris par les deux rayons vecteurs, menés au point de tangence*, et rencontre, par suite, le grand axe entre les deux foyers. Connaissant donc les deux foyers et un point de l'ellipse, il est facile de lui mener, par ce point, la normale et par suite la tangente.

II. Soit n' la direction de la normale et n celle de la tangente à l'ellipse, au point (x',y'), les coordonnées étant rectangulaires ; on aura donc simultanément

$$nn'+1=0 \text{ et } a^2ny'+b^2x'=0 \text{ ; d'où } b^2n'x'=a^2y'.$$

L'équation de la normale, savoir $y-y'=n'(x-x')$, devient donc

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x') \quad . \; . \; (9)$$

La *sounormale* est $x-x'$; elle répond à $y=0$, dans (9), et elle est fournie par

$$a^2(x-x')=-b^2x'.$$

La sounormale ne dépend point de l'ordonnée y' du contact et a toujours un signe contraire à celui de x'; d'où $x<x'$.

III. Soit Y l'ordonnée qui répond à l'abscisse x', pour la circonférence décrite sur $2a$, comme diamètre, et dans le plan de l'ellipse ; on aura $Y:y'::a:b$ ou $bY=ay'$. Soit d la distance de l'origine au point où la normale (9) va couper la droite $y=px$, passant par le point (x',Y); d'où $d^2=x^2+y^2$, $Y=px'$ et $bpx'=ay'$. L'équation $y=px$ devient donc $y-Y=p(x-x')$ et $bx'y-ax'y'=ay'(x-x')$.

Les x et les y ont mêmes valeurs respectives dans cette équation, celle de la normale et $d^2=x^2+y^2$, pour l'intersection (x,y) de la droite $y=px$ avec la normale (9) ; éliminant donc x et y de ces équations et ayant égard à $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$, on trouve

$$d=a+b.$$

(Ce théorème remarquable m'a été communiqué par mon collègue M. Brasseur).

IV. Soit (X,0) un point donné sur l'axe des x rectangulaires et z la distance de ce point au point quelconque (x,y) de l'ellipse. Pour calculer le minimum de z, on a les deux équations simultanées

$$z^2=y^2+(x-X)^2 \text{ et } a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Éliminant y^2, on verra que le minimum de z répond à

$$c^2x=a^2X, \text{ d'où } c^4y^2=b^2(c^4-a^2X^2) \text{ ;}$$

et que ce minimum est donné par la relation

$$c^2z^2=b^2(c^2-X^2).$$

Le plus grand minimum de z répond à $X=0$ et se réduit à b; tandis que le moindre minimum de z répond au maximum de X, savoir c^2 sur a; il est donc donné par $az=b^2$; d'où $y=0$ et $x=\pm a$. Le maximum de X est moindre que c, comme on le sait déjà (1).

Soit n' la direction de la droite minimum z; on aura $y=n'(x-X)$. La direction n de la tangente au point (x,y) de l'ellipse, est donnée par $a^2ny=-b^2x$; donc puisque $c^2x=a^2X$, il vient $nn'+1=0$. Ainsi *un point étant donné sur le grand axe, entre les deux foyers; la plus courte distance de ce point à l'ellipse est la normale à cette courbe.*

V. On verrait semblablement que *la plus grande distance* z, *d'un point* (0,Y) *du second axe* 2b, *à l'ellipse, est la normale menée de ce point.* On trouve en effet, pour le maximum de z, les relations $c^2y=-b^2Y$, $c^4x^2=a^2(c^4-b^2Y^2)$ et $c^2z^2=a^2(c^2+Y^2)$.

Comme on le pouvait prévoir, les ordonnées y et Y sont toujours de signes contraires. Cela résulte d'ailleurs de ce que le maximum et le minimum de Y étant c^2 sur b et 0, le plus grand et le moindre maximum de z sont a^2 sur b et a, répondant à $y=-b$ et à $x=\pm a$.

14. Des courbures dans l'ellipse I. Toute courbe plane pouvant être considérée comme formée d'un nombre infini d'*éléments rectilignes*, chacun infiniment petit, on appelle *courbure* de la courbe en un point donné, l'angle *infiniment petit*, ayant pour sommet ce point donné et pour côtés un élément et le prolongement de celui qui le précède immédiatement.

Il suit de là que *la circonférence est une courbe uniforme, ayant la même courbure en chaque point.* On sait, en effet, que le cercle n'est au fond qu'un polygone régulier, d'un nombre infini n de côtés, égaux à x et infiniment petits; de sorte que la circonférence a nx pour longueur rectiligne. Dans ce polygone régulier, tous les angles *extérieurs*, formés dans le sens du périmètre, c'est-à-dire tous les *angles de courbure*, sont égaux à l'angle au centre ω et valent ensemble 360°, d'où $n\omega=360°$. De sorte que la courbure ω est un angle constant infiniment petit.

II. Considérons la droite nx, composée du nombre infini n d'éléments égaux à x, et courbons-là en *arc circulaire*, de rayon r. Soit α l'arc, de rayon 1, qui mesure la courbure, égale alors à l'angle au centre : les deux arcs α et x étant semblables, on a

$1:r=\alpha:x$; d'où $x=r\alpha$. Si $r=1$ et que α' mesure la nouvelle courbure, on aura alors $x=\alpha'$; d'où $r\alpha=\alpha'$. Prenant pour *unité* invariable la courbure α', dans le cercle dont 1 est le rayon, d'où $r\alpha=1$; *la courbure α de toute circonférence aura pour mesure la valeur inverse de son rayon*. Et si ce dernier est *infini*, ou plutôt s'il est 1 sur 0, on aura $\alpha=0$. Il n'y a donc point de courbure quand l'arc circulaire n'a point de rayon, c'est-à-dire devient une droite.

III. La courbure de toute circonférence étant ainsi bien connue, peut servir à évaluer numériquement la courbure de toute ligne plane en un point donné, commun à deux éléments consécutifs de cette courbe. Car si par les milieux de ces deux éléments, on conçoit deux normales, infiniment voisines, se coupant en un point O, ce point est le centre du cercle, dont la circonférence contient sur elle les deux éléments proposés, évidemment; la courbure au point donné est donc la même que celle de la circonférence, en ce point (nommé *contact du second ordre* de la courbe avec la circonférence, dite *osculatrice* de la courbe au point donné); et cette *courbure est mesurée par la valeur inverse du rayon du cercle*. Voilà pourquoi le centre O, le rayon r et le cercle sont dits *centre*, *rayon* et *cercle de courbure* au point donné. De plus, ce point donné est un point d'*inflexion* ou de *rebroussement* de la courbe proposée, quand le rayon r change de signe ou devient infiniment petit.

15. DÉVELOPPÉE ET DÉVELOPPANTE. Les centres de tous les cercles *osculateurs* d'une courbe plane donnée C, étant infiniment voisins les uns des autres, déterminent une autre courbe C′ telle, que *chaque tangente à celle-ci est normale à la première, et réciproquement;* car les éléments successifs de C′ sont les prolongements des rayons de courbure consécutifs de C. De plus, concevons C′ enveloppée d'un *fil* inextensible et flexible, ce fil étant prolongé tangentiellement au-delà de la première extrémité de C′, d'une longueur égale au premier rayon de courbure de C; il est clair que si, tenant toujours ce fil tendu, on le fait mouvoir de manière à le détacher successivement des divers points de C′, l'extrémité mobile décrira la courbe C, et chaque point intermédiaire, une courbe parallèle à C. A raison de cette propriété, fort remarquable, propre à *rectifier* la courbe C′, celle-ci est dite la *développée* de C, et C la *développante* de C′. C'est ainsi que, dans le triangle équilatéral dont a est le côté, le contour ou la ligne brisée $3a$ est la développée de la ligne *discontinue* composée de trois arcs circulaires, de chacun 120°, dont les centres (de courbure) sont les trois sommets du triangle et dont a $2a$ et $3a$ sont les rayons.

On voit qu'une développante ne peut avoir qu'une seule développée (le centre pour la circonférence), mais qu'une développée peut avoir une infinité de développantes. Aussi la développée est-elle à l'égard de la développante, ce que le centre est à l'égard de la circonférence.

16. Développée de l'ellipse. Cherchons la développée de l'ellipse, rapportée à ses axes $2a$ et $2b$. Soient $x=k$ et $y=h$, $x=k+u$ et $y=h+v$, deux points de l'ellipse, *infiniment voisins;* de telle sorte que les longueurs numériques u et v soient infiniment petites. Les normales à ces deux points sont représentées par

$$Y-h=\frac{a^2h}{b^2k}(X-k),$$

$$Y-h-v=\frac{a^2(h+v)}{b^2(k+u)}(X-k-u).$$

Ces équations de deux normales infiniment voisines admettent les mêmes valeurs respectives pour les coordonnées X et Y du centre de courbure, et l'on en tire d'abord

$$a^2(kv-hu)X=c^2kv(k+u).$$

Or, les deux points (k,h) et $(k+u,h+u)$ étant sur l'ellipse, il en résulte

$$v:u=-b^2(2k+u):a^2(2h+v).$$

Substituant ce rapport dans l'équation en X, puis observant que u et v sont nuls à l'égard des nombres finis, on aura

$$a^4X=c^2k^3\text{; d'où } b^4Y=-c^2h^3; \ldots \quad (10)$$

Soient A et B les racines cubiques de a^2c^2 et b^2c^2; il est clair qu'on aura

$$c^2k^2=Aa^2\sqrt[3]{X^2} \text{ et } c^2h^2=Bb^2\sqrt[3]{Y^2}.$$

D'ailleurs $a^2h^2+b^2k^2=a^2b^2$; substituant donc, il vient

$$B\sqrt[3]{Y^2}+A\sqrt[3]{X^2}=c^2 \ldots\ldots \quad (11)$$

Dans cette équation, (X,Y) est un centre quelconque de courbure; elle représente donc la *développée* cherchée. Celle-ci a même centre que l'ellipse; elle a ses deux axes de symétrie sur $2a$ et $2b$, dont le plus grand sur $2b$; et enfin ses quatre *sommets* sont quatre *points de rebroussement*, où se terminent ses quatre *branches*, égales entre elles et tangentes aux deux axes.

17. **Rayon de courbure.** Soit r le rayon de courbure au point (k,h) de l'ellipse : comme (X,Y) est le centre de courbure en ce point, on a

$$r^2=(h-Y)^2+(k-X)^2.$$

Or, par les valeurs ci-dessus de X et de Y, on a

$$a^4(k-X)=a^4k-c^2k^3 \text{ et } b^4(h-Y)=b^4h+c^2h^3.$$

Soit N la longueur de la normale, depuis le point (k,h) jusqu'à l'axe des x rectangulaires : on trouve aisément $a^4N^2=b^2(a^4-c^2k^2)$; d'où

$$b^2(k-X)=N^2k \text{ et } b^4(h-Y)=a^2N^2h.$$

A cause de $ap=b^2$, il vient, pour calculer r,

$$b^8r^2=a^4N^6 \text{ et } p^2r=N^3. \;.\;.\;.\; (12)$$

Soit d'ailleurs i l'angle de N avec chacun des rayons vecteurs du point (k,h) ; on sait que $ch \cot i=b^2$; d'où $(b^4+c^2h^2)\cos^2 i=b^4$. Or, $b^4+c^2h^2=a^2N^2$, donne $aN\cos i=b^2$ ou $N\cos i=p$. Éliminant N, il vient

$$p=r\cos^3 i, \text{ ou } r=p\,\text{séc}^3 i. \;.\;.\; (13)$$

L'équation $p=r\cos^3 i$ servira à calculer le rayon de courbure en chaque point de l'ellipse. On peut aussi construire ce rayon r, pour le point M : on élève trois perpendiculaires successives, l'une sur MF, à la distance p de M ; la seconde sur MC, au point où la première coupe la normale MC en M ; la troisième sur le rayon vecteur FM, au point où il est coupé par la seconde : cette troisième perpendiculaire coupe la normale en M au centre C de courbure.

Soit d'ailleurs α la courbure de l'ellipse au point quelconque M, d'où $r\alpha=1$; on aura donc

$$p\alpha=\cos^3 i.$$

Aux extrémités de $2a$, $\cos i$ est à son maximum 1, aussi bien par suite que la courbure α ; donc au contraire le rayon r de courbure est alors à son minimum p. Aux extrémités de $2b$, l'angle obtus $2i$ est à son maximum, aussi bien que i ; donc $\cos i$ est à son minimum, donné par $a\cos i=b$, et par suite r est à son maximum, donné par $br=a^2$. De même la courbure α est à son minimum, fourni par $a^2\alpha=b$.

Observons que la théorie des courbures, dans les lignes du second ordre, étant très-élémentaire, devrait faire partie de la géométrie

analytique plane, comme conduisant immédiatement aux *lois de la gravitation ;* ainsi que nous l'avons établi, p. 220 de la 2[me] édition de notre Mécanique élémentaire. (Voyez d'ailleurs le tome I du Journal de Mathématique, publié par M. *Liouville*).

THÉORÈMES. La méthode précédente ne fournit pas seulement les *développées* de l'hyperbole et de la parabole, mais aussi les expressions (12) et (13) du rayon de courbure dans chacune ; et il en résulte que *dans les lignes du second ordre, le rayon de courbure a pour valeur, soit le cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre, soit le produit du demi-paramètre par le cube de la sécante de l'angle que la normale fait avec un rayon vecteur, mené au point de contact.*

Ces deux théorèmes généraux étaient faciles à prévoir ; car les trois courbes étant représentées par l'équation $y^2=2px+qx^2$, et les relations (12) et (13), pour l'ellipse, étant indépendantes du coefficient q, par lequel chaque genre de courbe est caractérisé ; ces relations doivent s'appliquer aux trois genres, nécessairement. On démontre aussi que, *si deux courbes du second degré sont semblables, il en est de même de leurs développées.*

18. DES AIRES DANS L'ELLIPSE. Les deux axes $2a$ et $2b$, d'une ellipse, étant donnés, on sait que cette courbe est la projection d'une circonférence, et réciproquement ; a étant le rayon de la circonférence, et l'angle v des deux plans étant donné par $b=a\cos v$, dans le premier cas. Or, on sait mesurer l'aire S' du *secteur* quelconque du cercle ; donc si S désigne le *secteur elliptique*, projection de S', on aura $S=S'\cos v$ ou $aS=bS'$. Ainsi l'on sait calculer l'aire de tout secteur elliptique ; et la même relation subsiste lorsque S' et S sont deux *segments*, circulaire et elliptique.

Deux diamètres rectangulaires du cercle ont pour projections respectives deux diamètres conjugués de l'ellipse ; or, les deux premiers divisent le cercle πa^2 en quatre secteurs égaux à $S'=\frac{1}{4}\pi a^2$; donc les deux derniers *divisent l'aire elliptique* E *en quatre secteurs équivalents à* S, d'où $S=\frac{1}{4}E$. La relation $aS=bS'$ devient donc $E=\pi ab$.

Soit d'ailleurs k le rapport rationnel ou non, de l'aire E au rectangle ab ; d'où $E=kab$. Le nombre abstrait k étant indépendant de a et b, ne change point quand on pose $b=a$; mais alors l'aire E devient le cercle πaa ; donc $\pi aa=kaa$. Et puisque k n'a point changé, on avait d'abord $k=\pi$; donc encore $E=\pi ab$. On voit que l'*aire de l'ellipse équivaut au cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre les deux demi-axes.*

On peut donc décrire le cercle qui soit dans un rapport connu avec une aire elliptique donnée, ou qui soit équivalent à la somme algébrique de tant d'aires elliptiques données qu'on voudra. Mais ce dernier problème est bien plus simple lorsque toutes les ellipses sont *semblables*.

19. ELLIPSES SEMBLABLES. *Deux ellipses sont semblables dès que les grands axes sont proportionnels aux petits.* Supposons les deux ellipses concentriques et les axes homologues en ligne droite ; de telle sorte que les deux courbes soient rapportées au même système de coordonnées rectangulaires. Soient $2a$ et $2b$ les deux axes de la première, $2a'$ et $2b'$ ceux de la seconde : par hypothèse $2a':2a=2b':2b$. Soit r le rapport commun, de *similitude*, d'où $a'=ar$ et $b'=br$: si (x,y) et (x',y') sont deux points homologues, il est facile de voir que les coefficients des termes du second degré en x et y, x' et y', sont respectivement égaux, dans les équations des deux courbes; donc ces deux ellipses sont *semblables*, de forme et de position (7), et l'une *représente* l'autre.

Soient donc L et L' les *longueurs* des deux ellipses, E et E' leurs *aires;* il est clair qu'on aura $L'=Lr$ et $E'=Er^2$. La première ellipse servira donc à déterminer aisément la seconde et la représente complètement ; mais la difficulté est de mesurer L, parce que l'expression de cette longueur ne saurait s'obtenir par des procédés élémentaires rigoureux : il faut se résoudre à *tendre*, sur l'ellipse matérielle, un *fil* flexible et à prendre, pour L, la longueur du fil ainsi tendu, ayant ses deux bouts réunis. Sur le papier, on emploie une lame *élastique*, à bords rectilignes ; mais une fois que L est déterminée numériquement, il en résulte la longueur $L'=Lr$. Cela montre l'importance de la similitude, pour le mesurage, comme pour la recherche des propriétés des figures.

COROLLAIRES. Dans deux ellipses semblables, les courbures sont égales pour chaque couple de points homologues. Si deux ellipses sont représentées par des équations complètes, rapportées à un même système quelconque de coordonnées, ces deux ellipses sont semblables dès que les trois termes du second degré en x et y sont respectivement égaux. Enfin, on peut construire l'ellipse semblable à une ellipse donnée, connaissant le rapport, soit des deux longueurs ou des deux aires, soit de deux arcs ou de deux secteurs semblables ; etc.

20. POLYGONES CIRCONSCRITS A L'ELLIPSE. Soit P un polygone quelconque de n sommets, *circonscrit* au cercle ; sa projection P'

est donc un polygone de n sommets *circonscrit* à l'aire elliptique E, projection du cercle, et l'on a $P'=P\cos v$ ou $aP'=bP$.

Comme a et b sont constants, P et P' variables, il est clair que P et P' seront à la fois les moindres possibles ; or P est un minimum *absolu* dès qu'il est régulier ; donc alors P' est aussi un minimum absolu. D'ailleurs, il y a une infinité de polygones réguliers égaux à P circonscrits au cercle, tous concentriques, les contacts étant les milieux des côtés ; donc il y a une infinité de polygones, équivalents au minimum P', circonscrits à l'ellipse, les contacts étant les milieux des côtés et le centre de la courbe étant chaque fois celui de *gravité* ou de *symétrie* du minimum P', suivant que le nombre n de ses côtés est *impair* ou *pair*.

1° Si $n=3$, les minimums P' valent chacun le triangle isocèle dont la base $2b\sqrt{3}$ touche l'ellipse à une extrémité du grand axe $2a$, le sommet étant sur le prolongement du même axe. Et comme le centre de gravité de ce triangle minimum coïncide avec le centre de l'ellipse, la hauteur du triangle est $3a$; donc l'aire minimum a pour mesure $3ab\sqrt{3}$.

Les sommets de tous les triangles minimums circonscrits P' apppartiennent à une seconde ellipse, semblable à la première, de forme et de position ; car cette nouvelle ellipse est la projection de la circonférence, de rayon $2a$, circonscrite au triangle équilatéral minimum, lui-même circonscrit au cercle proposé : donc $4a$ et $4b$ sont les axes de la seconde ellipse, dont par suite l'aire est quadruple de celle de la première. On peut donc ainsi passer par une suite d'ellipses concentriques semblables, dont les aires deviennent de 4 en 4 fois plus grandes.

2° Si $n=4$, tous les quadrilatères minimums P', circonscrits à l'ellipse, sont des parallélogrammes conjugués, équivalents entre eux et aux rectangles des axes. Les sommets de tous les P' se trouvent sur une ellipse, semblable, de forme et de position, à la première, et d'une aire d'ouble ; car ses axes sont $2a\sqrt{2}$ et $2b\sqrt{2}$.

3° En général, si n est pair, tous les polygones minimums P', circonscrits à l'ellipse, sont symétriques chacun, équivalents entre eux et concentriques à la courbe ; ils sont tous inscrits dans une ellipse, concentrique et semblable à la première. Ainsi pour $n=6$, par exemple, les hexagones minimums sont chacun symétrique et tous ont la même mesure $2ab\sqrt{3}$; ils sont inscrits dans une seconde ellipse, semblable à la première et dont l'aire est les quatre tiers de celle de la première.

21. ELLIPSES INSCRITES. On a vu en géométrie que, parmi tous les polygones équivalents, de chacun n côtés et circonscriptibles à différents cercles, celui de plus grand cercle inscrit est régulier. Soient donc P et P′ deux polygones de chacun n côtés, le premier circonscrit au cercle de rayon a variable, et le second P′, projection du premier, circonscrit à l'aire elliptique E, projection de l'aire πa^2 du cercle; et soit v l'angle invariable des deux plans: on aura

$$P' = P \cos v \text{ et } E = \pi a^2 \cos v.$$

L'angle v étant donné constant, aussi bien que l'aire P, il en résulte l'aire P′, aussi constante. Or, le cercle variable πa^2 est le plus grand possible dès que P est un polygone régulier; donc alors l'aire E est aussi la plus grande possible : elle touche chacun des côtés de P′ à son milieu et a pour centre celui de gravité de P′. Ce dernier polygone, qui doit être *symétrique*, si n est pair, étant donc tracé, et connaissant l'angle v, qui rend P un polygone régulier, P sera aussi tracé; d'où l'on aura le rayon a du cercle maximum inscrit, et par suite le grand axe $2a$ de l'aire elliptique E maximum, inscrite dans P′. Quant au second axe $2b$, il sera donné par $b = a \cos v$; on peut donc décrire l'ellipse maximum, inscrite dans P′, ou du moins une ellipse égale ; mais la difficulté, même lorsque $\cos v = \frac{1}{2}$, est de tracer, *dans l'intérieur de* P′, *l'ellipse maximum, qui doit avoir pour centre celui de gravité de* P′ *et toucher chacun de ses côtés au milieu.*

1° Supposons que P′ soit un triangle quelconque tracé, pris pour base d'un prisme triangulaire droit : on peut toujours couper ce prisme par un plan, de telle sorte que la section soit un triangle équilatéral P; on peut même calculer l'aire P, aussi bien que $\cos v$, v désignant l'angle des deux plans. Observons que la description de l'ellipse exige cinq conditions distinctes, comme de passer par cinq points donnés ; il existe donc une infinité d'ellipses inscrites dans le triangle donné P′. Or, en faisant tourner ce triangle dans son plan, il est la projection d'une suite de triangles P, équivalents entre eux ; donc la circonférence inscrite dans chacun de ceux-ci, a pour projection une ellipse inscrite dans P′. Et puisque quand P est équilatéral, le cercle inscrit est le plus grand possible, on voit qu'alors l'aire elliptique E, inscrite dans P′, est la plus grande possible : elle touche chacun des côtés de P′, dans sa nouvelle position, au point milieu de ce côté, et son centre est celui

de gravité de P'. Soit donc $3d$ la droite qui joint un sommet de P' au milieu du côté opposé $2m$; $2b'=2d$ sera un diamètre de l'ellipse maximum inscrite ; tandis que son conjugué $2a'$, pris pour axe des x obliques, est parallèle à la tangente $2m$. D'ailleurs le milieu d'un autre côté, appartenant à l'ellipse maximum, a pour coordonnées $x=m$ et $y=\frac{1}{2}d$; donc l'équation $a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2$ fournit $a'=\frac{2}{3}m\sqrt{3}$. Connaissant donc ainsi les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, de longueur et de position, il en résulte le tracé des deux axes et la description de l'ellipse maximum, inscrite dans le triangle quelconque donné P'.

L'aire de cette ellipse est $E=\frac{1}{9}\pi P'\sqrt{3}$; d'où $E>\frac{1}{2}P'$. Si donc *on veut, dans un morceau triangulaire* P' *d'acajou, couper la plus grande table possible*, il faudra prendre cette table *elliptique* plutôt que *rectangulaire* ($\frac{1}{2}P'$ étant le plus grand rectangle *inscrit* dans P') ; et nous venons de voir comment on peut résoudre le problème.

2° Lorsque P' est un quadrilatère convexe quelconque tracé, il existe encore une infinité d'ellipses inscrites dans ce quadrilatère. Menant par les milieux des côtés de P' des droites respectivement parallèles et par suite égales aux deux droites $2d$ et $2m$ qui joignent ces milieux, on formera le parallélogramme R, équivalent à $P'=P\cos v$. Comme R est la projection du carré équivalent à P ; d'où $P=4a^2$, a désignant le rayon du cercle maximum inscrit dans les quadrilatères équivalents à P ; l'aire elliptique E, projection du cercle maximum, est celle de l'ellipse maximum inscrite dans R, ayant $2d$ et $2m$ pour diamètres conjugués et pour aire maximum $E=\frac{1}{4}\pi P$; elle est donc facile à décrire. Mais elle n'est pas inscrite dans P', bien qu'elle passe par les milieux de ses côtés : la plus grande ellipse, inscrite dans le quadrilatère convexe donné P', ne saurait se trouver par la méthode élémentaire des projections ; car pour cela, P' étant la base d'un prisme quadrangulaire droit, il faudrait qu'il fût possible de couper ce prisme par un plan tel, que la section résultante fût un carré.

22. Polygones inscrits. Considérons les polygones de n côtés, en nombre illimité, inscrits dans une ellipse, donnée par ses axes $2a$ et $2b$; son aire E étant la projection du cercle dont a est le rayon. Procédant comme plus haut, nous verrons qu'il existe une infinité de polygones *maximums* inscrits, tous équivalents à P' et chacun *symétrique*, si n est pair ; tous circonscrits à une même ellipse dont l'aire E' est semblable, de forme et de position, à la proposée E. Ainsi pour $n=3$, le triangle maximum $P'=\frac{3}{4}ab\sqrt{3}$ et

$E'=\frac{1}{4}E$; pour $n=4$, le quadrilatère maximum est un parallélogramme P', variable de forme et pouvant devenir un losange ou un rectangle, sans qu'il cesse d'être équivalent au demi-rectangle des axes, et l'on a $E'=\frac{1}{2}E$; enfin, pour $n=6$, tous les hexagones symétriques maximums inscrits sont équivalents à $\frac{3}{2}ab\sqrt{3}$, et l'on a $E'=\frac{3}{4}E$.

23. Ellipses circonscrites. On a vu en géométrie que le plus petit de tous les cercles, circonscrit à des polygones de chacun n côtés et tous équivalents à P, répond au polygone régulier. Soit A le rayon du cercle minimum ; en raisonnant comme plus haut, on verra que parmi toutes les aires des ellipses circonscrites aux polygones équivalents à P', projections des polygones P, la plus petite de toutes a pour *centre* celui de *gravité* ou de *symétrie* du polygone $P'=P\cos v$, suivant que n est *impair* ou *pair*, et que de plus, 2B désignant le second axe de l'aire elliptique minimum E, d'où $B=A\cos v$, on aura toujours $E'=\pi A^2\cos v=\pi AB$; et si E désigne l'aire elliptique maximum inscrite dans P', d'où $E=\pi ab$, $b=a\cos v$ et $A:a=B:b$; les deux ellipses maximum E et minimum E' sont semblables, de forme et de position. Et puisqu'on sait décrire la première, pour le triangle et le quadrilatère P', il sera facile d'en déduire la description de la seconde, chaque fois. Pour le triangle P' quelconque, on a $E'=\frac{4}{9}\pi P'\sqrt{3}=4E$, et pour le quadrilatère P', il vient $E'=\frac{1}{2}\pi P'=2E$.

24. Théorèmes. Ce qui précède conduit à démontrer, avec facilité, les théorèmes que voici, sur les quadrilatères maximums et minimums inscrits et circonscrits à l'ellipse, dont $2a$ et $2b$ sont les axes tracés :

I. Le rectangle inscrit, d'aire et de contour maximums, est le carré dont les diagonales sont bisectrices des angles droits des deux axes ; c'est le seul carré inscrit, ayant le côté égal à la hauteur du losange des sommets.

Scholie I. Les maximums ci-dessus sont relatifs aux diamètres égaux ; mais le plus grand de tous les rectangles inscrits est semblable, de forme et de position, au rectangle des axes et en vaut la moitié ; il est donc plus grand que le seul carré inscrit.

Scholie II. Le rectangle inscrit, de contour maximum, égal au contour du losange des sommets, a ses diagonales égales telles, que la direction n de l'une est donnée par $a^2n=b^2$. Le contour maximum de ce rectangle inscrit est plus grand que celui du seul carré inscrit.

II. Parmi tous les losanges inscrits dans l'ellipse, le seul carré est celui dont l'aire, le contour et la somme des diagonales sont les moindres qu'il se puisse.

III. L'ellipse admet une infinité de losanges circonscrits, dont un seul carré, ayant ses contacts aux extrémités de deux diamètres égaux, non rectangulaires, et chaque diagonale double de la corde des sommets. De plus, les sommets de tous ces losanges se trouvent sur les prolongements des deux axes.

IV. De tous les losanges circonscrits, le plus petit équivaut au rectangle des axes et ses côtés sont parallèles aux diagonales de ce rectangle. (Il est moindre que le carré circonscrit, comme cela doit être).

V. Parmi tous les losanges circonscrits, celui de moindre périmètre a son côté égal à la somme des deux demi-axes; les demi-diagonales h et k sur les axes des y et des x étant données par $h^2=b(a+b)$ et $k^2=a(a+b)$. Le côté du losange proposé est moindre que celui du seul carré circonscrit, comme cela doit être.

VI. Entre tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, les plus petits sont les parallélogrammes conjugués, tous équivalents à $4ab$; dont un seul *rectangle*, ayant le plus petit contour $4(a+b)$, et un seul *losange*, ayant le plus grand périmètre $4\sqrt{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$, parmi les parallélogrammes conjugués. Ce losange conjugué est le minimum de tous les losanges circonscrits à l'ellipse (IV).

VII. Si le produit des directions des deux côtés adjacents est un nombre constant et négatif, les sommets de tous les parallélogrammes circonscrits, en nombre infini, décrivent une ellipse concentrique et semblable, de forme et de position, à la première, si tous les parallélogrammes sont conjugués. Dans ce cas, l'aire de la seconde ellipse est double de celle de la première.

Scholie I. On peut ainsi obtenir une suite d'ellipses semblables, de 2 en deux fois plus grandes; et si R désigne le rayon du cercle équivalent à la somme des m premières, on aura $R^2=ab(2^m-1)$.

Scholie II. La propriété ci-dessus, *descriptive* de la seconde ellipse, est celles des cordes supplémentaires. Mais tous les sommets se trouveraient sur les prolongements des deux diamètres conjugués égaux, si le produit constant était toujours positif.

VIII. Les sommets de tous les rectangles circonscrits à l'ellipse décrivent une circonférence concentrique, de rayon égal à la corde des sommets; et le plus grand de tous ces rectangles circonscrits est le seul carré circonscrit: c'est aussi le rectangle de périmètre maximum.

IX. Deux ellipses concentriques semblables, étant les projections de deux cercles concentriques; non-seulement toute corde de la plus grande ellipse, tangente à la plus petite, est divisée en deux parties égales, par le contact; mais v désignant l'angle des deux plans et C la demi-corde de la plus grande, tangente à la plus petite et parallèle à son grand axe; la *couronne elliptique* a pour mesure $\pi C^2 \cos v = \pi R^2$, en posant $C:R::R:C\cos v$.

25. Théorèmes descriptifs. Voici encore plusieurs théorèmes, propres à décrire l'ellipse et d'autres lignes, qui en dépendent, plus ou moins immédiatement.

I. Si l'on cherche le lieu géométrique du contact de toute tangente à l'ellipse et des milieux des cordes parallèles, on trouve, non-seulement un diamètre, mais l'équation de celui-ci et celle de la tangente proposée.

II. Le lieu géométrique des milieux d'une suite de cordes, partant d'un point P du plan de l'ellipse, dont O est le centre, n'est pas une droite, mais une ellipse semblable, de forme et de position, à la première, son centre étant le milieu de OP.

III. Le rayon du cercle moyen proportionnel entre les aires des deux ellipses précédentes, est lui-même moyen proportionnel entre le demi-grand axe de la première et le demi-petit axe de la seconde. On peut aisément calculer ce rayon, lorsque 160 et 120 étant les axes de la première ellipse, les coordonnées du point P valent 100 chacune.

IV. Le lieu géométrique des points qui divisent en trois parties égales chaque corde parallèle à un axe d'une ellipse tracée, est une seconde ellipse concentrique, d'une aire six fois plus petite.

V. Le lieu géométrique de tous les points où les perpendiculaires, menées du centre sur les tangentes à l'ellipse, coupent les ordonnées des contacts, prolongées, est une seconde ellipse, semblable à la première, mais inversement située, comme ayant son petit axe sur le grand de l'autre.

VI. Si pour une même abscisse, l'ordonnée d'une courbe est moitié de celle de la circonférence, l'aire de cette courbe, à trouver, est moitié de l'aire du cercle.

VII. Si (x',y') étant un point quelconque de la circonférence donnée, (x,y) est un autre point tel, qu'on ait toujours $xy = x'y'$; le lieu géométrique de tous ces autres points est une ellipse *indéterminée*, mais dont l'aire est toujours équivalente à celle du cercle.

VIII. Dans l'ellipse, rapportée à ses axes $2a$ et $2b$, la somme des deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués quelconques, passant par un foyer, a pour expression $2a \times 2p$, $2p$ désignant le paramètre. (Cette propriété remarquable n'est pas descriptive de l'ellipse).

IX. Pour décrire une ellipse, dont les axes sont donnés, ou pour décrire une ellipse semblable, *d'un mouvement continu*, on a le *triangle*

variable, qui revient au *losange variable*. Voici encore, pour cet effet, un *instrument* très-simple : la pointe fixée en un point quelconque d'une règle mobile, décrit une ellipse, pendant que la règle se meut de telle sorte que ses extrémités glissent sur deux droites perpendiculaires entre elles.

X. La pointe fixée sur le cercle roulant intérieurement sur la circonférence d'un cercle fixe, de rayon double, décrit une ellipse dont les demi-axes a et b sont la plus grande et la plus petite distance de la pointe à la circonférence mobile ; et suivant que la pointe est à la circonférence ou au centre, elle décrit une droite ou un cercle égal au cercle mobile. Voilà donc encore un instrument propre à décrire l'ellipse, d'un mouvement continu.

XI. Peut-on diviser l'aire elliptique donnée en deux portions équivalentes, soit par une circonférence, soit par une ellipse semblable? décrire ces deux courbes et calculer le rayon du cercle équivalent à la différence de deux aires elliptiques concentriques semblables, connaissant les axes 200 et 120, et 100 et 60 des deux ellipses.

XII. Décrire l'ellipse dont chaque ordonnée, pour une abscisse commune, soit la somme de l'abscisse et de l'ordonnée correspondantes de la circonférence, des rayon 10, rapportée au même système de coordonnées rectangulaires.

XIII. Les deux côtés $CA=b$ et $CB=a$ du triangle tracé T, étant chacun divisé en n parties égales ; si l'on joint, par deux droites, le point A au v ième point de division de a, à partir de C, et le point B au v ième point de division de b, à partir de A ; ces deux droites se coupent sur l'ellipse *maximum*, inscrite dans 4T (triangle obtenu en prolongeant chacun des côtés CA et CB d'une longueur égale à lui-même). L'ellipse maximum devient une circonférence, si $b=a$ et l'angle $C=30°$.

XIV. Deux ellipses, rapportées au même système de coordonnées rectangulaires, étant tracées ; le lieu géométrique des intersections des cordes de contact de deux couples de tangentes à la plus petite, menée de deux points infiniment voisins de la plus grande, est une troisième ellipse ; et l'aire de la plus petite ellipse proposée est moyenne proportionnelle entre les aires des deux autres.

Réciproquement, les deux tangentes à la plus grande des deux ellipses proposées, menées par les extrémités de chaque corde touchant la plus petite, se coupent sur une troisième ellipse.

XV. Connaissant numériquement les deux côtés a et b de l'angle droit d'un triangle rectangle mobile, dont l'un a s'appuie constamment sur deux axes rectangulaires, calculer l'aire de l'ellipse décrite par le sommet opposé à ce côté. Il existe un problème analogue pour le triangle équilatéral mobile, de côté donné a.

XVI. L'angle des coordonnées étant de 60°, quel est le lieu géomé-

trique de tous les points tels, 1° que la somme des carrés des distances de chacun aux deux axes des coordonnées soit équivalente au carré donné R^2 ? 2° que R^2 soit la somme des carrés des diagonales du parallélogramme P variable, construit sur les coordonnées de chaque point ; ou bien cette somme, plus ou moins l'aire du parallélogramme? (Réponse : chaque fois une ellipse, dont on sait calculer les axes, de longueur et de position, aussi bien que l'aire ; et l'on sait aussi décrire la courbe).

Scholie. Le lieu serait une *hyperbole*, si le carré donné R^2 devait être équivalent, soit au rectangle des distances de chaque point aux deux axes, soit à la différence des carrès de ces distances, soit enfin à 4 fois l'aire du parallélogramme P, moins le carré de la diagonale opposée à l'angle de 60°. Mais le lieu serait une *parabole*, facile à décrire, si la distance de chaque point à l'axe des abscisses devait être moyenne proportionnelle entre 12 et l'x de ce point.

XVII. Soit d la longueur de la perpendiculaire élevée au milieu de la droite donnée $2a$: si le système se meut de telle sorte que les extrémités de $2a$ glissent, l'une sur l'axe des x rectangulaires et l'autre sur l'axe des y ; l'extrémité de d décrit une ellipse ou deux droites perpendiculaires entre elles, suivant que d n'est pas ou est égale à la demi-droite a ; et si $d=2a$, l'aire elliptique est triple du cercle décrit par le milieu de $2a$.

XVIII. Deux cercles, de rayons a et b, étant tracés sur un plan ; le lieu géométrique des centres de tous les cercles tangents aux deux proposés, est une ellipse ou une hyperbole, dont les deux centres donnés sont les foyers, suivant que l'un des deux cercles est *intérieur* ou *extérieur* à l'autre, même quand il le toucherait. Le lieu serait une parabole, si l'un des deux cercles devenait une droite hors de l'autre cercle. (Calculer l'aire elliptique lorsque la distance des centres étant 10, les rayons a et b valent 30 et 20).

XIX. Lorsque la circonférence de rayon a donné, est tracée ; si l'on prolonge chacune de ses ordonnées rectangulaires de la longueur constante b, le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est une circonférence égale à la proposée, sans coïncider avec elle. Mais si chaque ordonnée est prolongée d'une longueur égale à cette ordonnée ou égale à l'abscisse correspondante ; le lieu géométrique est chaque fois une ellipse, d'une aire double à celle du cercle, dans le premier cas, et équivalente au cercle proposé, dans le second cas.

Scholie. Ce triple théorème, remarquable en lui-même, l'est aussi parce qu'en réalité chaque ordonnée est prolongée *extérieurement* au cercle; ce qui donne séparément les moitiés respectives de chacune des trois courbes ci-dessus, lorsque la circonférence proposée est rapportée à son diamètre $2a$. Mais si l'origine était au centre et qu'on portât la longueur b sur chaque corde perpendiculaire à l'axe des x rectangulaires, à partir de chacune de ses deux extrémités, on aurait séparément

les quarts de la courbe cherchée. (C'est ainsi que procédait M. Noël, professeur de mathématiques en ville; lequel, de cette manière, m'a conduit au théorème proposé).

XX. Lorsque l'hypoténuse d'un triangle rectangle variable est sur l'axe des x rectangulaires, à partir de l'origine, et que le côté opposé à celle-ci est double du côté adjacent; non-seulement le lieu géométrique du sommet de l'angle droit est le système de deux droites; mais ces deux droites sont les asymptotes de l'hyperbole $y^2-4x^2=-4$. Et si l'angle à l'origine était double de l'autre, le lieu géométrique serait les asymptôtes de l'hyperbole équilatère $y^2-x^2=-1$.

26. Pôles et Polaires dans l'ellipse. Les propriétés des *pôles* et de leurs *polaires*, dans les trois courbes du second degré, se démontrent, avec facilité, soit d'après l'équation générale et complète, soit plutôt d'après l'équation commune et aux axes conjugués. Mais pour l'ellipse, la théorie des pôles et des polaires est conséquence immédiate de cette théorie, dans la circonférence, à l'aide des projections orthogonales; ainsi qu'on peut le voir dans la 2e édition de notre traité de géométrie. Il en résulte les belles propriétés des *hexagones incrits* et *circonscrits* à l'ellipse, et ainsi que différents corollaires, faciles à déduire. Nous ne parlons ici des pôles et des polaires, dans l'ellipse, que pour rappeler l'une des belles applications de la méthode des projections orthogonales, dans la recherche des propriétés de cette courbe. Voici encore d'autres applications.

27. Tangentes communes. Deux ellipses E et E', semblables de forme et de position, étant données sur un plan; les circonférences C et C', dont elles sont les projections, se trouvent sur le plan faisant, avec le premier, un angle v dont le cosinus est égal au rapport (de similitude) des deux axes homologues de E et de E'. Or, il y a généralement quatre tangentes communes aux deux circonférences; donc *il y a aussi quatre tangentes communes aux deux ellipses*, *entièrement l'une hors de l'autre*. Et ces quatre tangentes se réduisent à trois, à deux, à une seule et à aucune, suivant que les deux ellipses E et E' se touchent extérieurement, se coupent (en deux points et jamais plus), se touchent intérieurement ou sont l'une dans l'autre.

De plus, les tangentes communes vont se couper deux à deux aux *pôles de similitude* de deux ellipses et *divisent* (*harmoniquement*) *la distance des centres de ces deux courbes en quatre segments*, *proportionnels aux axes homologues*. Il est donc facile de construire ces deux pôles, par chacun desquels menant deux tangentes à l'une des ellipses, elles sont aussi tangentes à l'autre.

28. Axe radical. On sait que l'*axe radical* de deux cercles C et C' est la droite qui passe par les milieux des deux tangentes communes extérieures. Cette droite, perpendiculaire à la distance des centres, est telle

que les quatre tangentes ou les deux moindres cordes, menées par l'un quelconque de ses points, sont égales entre elles. Or, on peut toujours prendre les deux plans, comprenant l'angle *v*, tels que leur intersection soit parallèle à la distance des centres de C et de C′ ; et alors les grands axes des ellipses E et E′ sont en ligne droite. Dans ce cas, l'*axe radical* des deux courbes, étant la droite qui joint les milieux des deux tangentes communes extérieures, est non-seulement perpendiculaire à la distance des centres, mais de plus, les quatre tangentes ou les deux moindres cordes, menées de l'un quelconque de ses points, sont égales entre elles.

Si les deux ellipses se coupent, l'axe radical est sur la corde commune; et il coïncide avec la tangente commune, si elles se touchent extérieurement ou intérieurement. Or, cela a toujours lieu, pour deux ellipses quelconques, lorsque la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des demi-diamètres sur cette distance.

29. CENTRE RADICAL. On sait que le *centre radical* de trois cercles quelconques est le point où se coupent les trois axes radicaux de ces trois cercles, pris deux à deux; donc le *centre radical* de trois ellipses semblables est le point où vont se couper les trois axes radicaux de ces ellipses, prises deux à deux.

30. CERCLES TANGENTS I. Les propriétés des *pôles* et *polaires*, des *centres* et *axes radicaux*, des *pôles* et *axes de similitude*, des *points* et *cercles réciproques*, etc., ont été employées, par différents géomètres modernes, pour résoudre les problèmes sur les contacts des droites et des cercles. Mais les solutions, bien que très-simples en théorie, ne nous paraissent point préférables à celles que nous avons indiquées, sous formes de théorèmes, p. 350 de la troisième édition de notre traité de géométrie élémentaire; parce qu'elles exigent le tracé d'au moins autant de lignes que les nôtres, et que celles-ci ont l'avantage de se baser sur les propriétés les plus élémentaires de la circonférence et de se déduire immédiatement de l'analyse de l'énoncé.

II. Les problèmes sur les cercles tangents sont nombreux et plusieurs passent pour difficiles; bien que les relations dans le cercle conduisent aisément aux procédés graphiques, propres à résoudre ces problèmes. Mais la difficulté vient principalement de la multitude de lignes dont la solution exige le tracé. Or, quand on doit décrire un grand nombre de lignes, pour avoir la quantité inconnue, il est impossible de l'obtenir d'une manière suffisamment approchée, à cause des erreurs inévitables dans l'emploi des instruments : il est non-seulement plus court alors, mais souvent aussi beaucoup plus exact de résoudre le problème par des *essais* ou des *tâtonnements*, d'autant moins nombreux et moins fautifs, qu'on est plus exercé aux constructions avec le compas et la règle. Il arrive même souvent qu'un ou deux essais suffisent pour obtenir la figure

cherchée, avec toute la précision que peuvent comporter les opérations descriptives. C'est donc ce moyen de solution qu'il faut d'abord employer, soit pour avoir la solution elle-même, soit pour découvrir les procédés géométriques rigoureux, propres à la vérifier.

III. La solution par *tâtonnements* est souvent la seule praticable; mais elle peut avoir l'inconvénient de faire regarder comme vrai ce qui ne l'est qu'à peu près ou dans des circonstances très-particulières; tandis que l'analyse de l'énoncé, d'après des principes certains, décomposant la question en plusieurs autres, plus simples et qu'on sait résoudre par des procédés rigoureux, conduit directement au but, montre d'où proviennent les erreurs pratiques et donne le moyen de les corriger, ou du moins d'en affaiblir l'influence sur les résultats. Il est clair que plus on sait traiter de ces problèmes élémentaires, plus il est facile d'en trouver parmi eux qui soient propres à résoudre les nouveaux qu'on pourrait se proposer; et il y aura chaque fois un choix à faire parmi les *données* et les *inconnues*, qu'il faut toujours réduire au plus petit nombre possible, par une analyse logique rigoureuse, et à l'aide parfois de grandeurs *auxiliaires*, connues ou inconnues, choisies convenablement. Mais on serait souvent arrêté dans la solution, si l'on ne voulait faire usage que des ressources qu'offre la géométrie pure : l'algèbre, lorsqu'elle est applicable, donne les inconnues avec beaucoup plus de précision que les opérations graphiques; souvent même elle est indispensable pour découvrir les solutions les plus simples, avec la règle et le compas, non-seulement pour les problèmes *déterminés* de géométrie; mais aussi pour les problèmes *indéterminés*. Que serait, en effet, l'étude des courbes, sans la grande et belle idée de Descartes de *représenter* les *points* et les *lignes* par des *équations* ?

C'est particulièrement dans les problèmes sur les contacts des droites et des circonférences, que la solution par *tâtonnements* doit s'employer, sauf à la vérifier ensuite, par le calcul; lequel est indispensable, à cause du grand nombre de lignes qu'il faut décrire pour avoir la figure demandée et parce que les dimensions de cette figure dépasseraient souvent l'ouverture du plus grand compas possible et la longueur de la règle.

31. Problème I. *Calculer le rayon* x *et le centre* O *de la circonférence tangente à la droite* D *et aux deux cercles extérieurs, de centres* A *et* B, *situés d'un même côté de la droite.* Ici les données numériques sont les rayons a et b des deux cercles tracés, les distances h et k des centres A et B à la droite D, avec la portion d que h et k interceptent sur D; tandis que les inconnues sont le rayon x et la distance y du pied de h au contact du cercle cherché avec D. Pour calculer ces deux inconnues, on a les deux équations simultanées :

$$(a+x)^2=y^2+(h-x)^2,$$
$$(b+x)^2=(k-x)^2+(d-y)^2.$$

Éliminant x, l'équation finale sera du second degré en y ; le problème aura donc généralement quatre solutions, lesquelles peuvent se réduire à trois, à deux, à une ou à aucune, suivant la position relative et les valeurs particulières des données. Les deux cercles A et B peuvent toucher D d'un même côté ; d'où $h=a$ et $k=b$. Le cercle B se réduit à son centre B, si $b=0$; et alors il faut *décrire la circonférence, passant par le point* B *et touchant les deux lignes* D *et* A, *droite et circulaire.* Ce problème admet deux solutions : a et b pourraient être *nuls.*

32. PROBLÈME II. *Trois cercles extérieurs, de centre* A, B, C *et de rayons* a, b, c, *étant tracés sur un plan, calculer le rayon* x *du cercle* O *qui les touche tous les trois.* Les données numériques sont a, b, c, la distance AB$=d$, la distance CK$=h$ du centre C à AB et le segment AK$=k$. Les inconnues sont x, y et z, savoir y distance de O à AB et z distance de A au pied de y. Or, en supposant $a>b>c$, on a les trois équations simultanées, le cercle O étant intérieur :

$$(a+x)^2=y^2+z^2,\ (b+x)^2=y^2+(d-z)^2$$
$$\text{et } (c+x)^2=(h-y)^2+(z-k)^2.$$

L'équation finale en x est du second degré ; il en résulte les rayons et les centres des deux cercles touchant les trois proposés *intérieurement* et *extérieurement.* Changeant c en $-c$, puis b en $-b$ et à la fois b et c en $-b$ et $-c$, on aura les rayons et les centres de six autres cercles tangents aux trois proposés. De sorte que le problème a généralement huit solutions ; lesquelles, à raisons des positions et des valeurs particulières, peuvent se réduire à beaucoup moins et même à aucune.

Si $c=0$, le problème revient à *calculer le rayon et le centre de la circonférence, passant par un point donné* C *et touchant les deux cercles tracés* A *et* B. Mais si $b=0$ et $c=0$, il faudra *calculer le rayon et le centre de la circonférence, tangente au cercle tracé* A *et passant par les deux points* B *et* C, *donnés hors de ce cercle.*

Scholie. Pour tracer les huit circonférences, d'après les procédés purement géométriques, il nous paraît qu'il faudrait employer au moins cent-onze lignes ; ainsi le tracé par tâtonnements et le calcul sont ici les seuls praticables : ils sont à la fois les plus simples et les plus exacts, savoir les tâtonnements sur le papier et le calcul sur le terrain.

33. PROBLÈMES. Calculer le rayon et le centre de la circonférence, 1° tangente à deux droites tracées et à un cercle donné (qui pourrait se réduire à un point donné) ; 2° passant par un point donné, touchant un cercle tracé et ayant son centre sur une droite donnée ; 3° enfin, touchant deux cercles tracés et ayant son centre sur une droite donnée.

34. ELLIPSES TANGENTES. Les problèmes, fort nombreux, sur les contacts des droites et des circonférences, conduisent, à l'aide des projections, à résoudre les mêmes problèmes sur les contacts des droites et des

ellipses *semblables*. C'est ainsi que trois ellipses semblables étant tracées sur un plan, il existe généralement huit ellipses semblables, touchant chacune les trois proposées ; et il est possible de calculer le centre et les axes principaux de chacune, de longueur et de position.

Scholie. On peut aussi résoudre, par une équation du second degré, le problème que voici : *Étant données trois sphères, tangentes à un plan et d'un même côté, trouver le centre et le rayon de la sphère qui touchent les trois premières et le plan.* (Voyez d'ailleurs à la page 389, 2e édition de la géométrie).

35. Quadrature des Coniques. C'est en vertu de l'analogie qui existe entre les trois courbes du second degré, que leur *quadrature* se tire immédiatement de l'expression du *secteur circulaire*, à l'aide de certaines séries. Pour cet effet, M. *Bary* (Tome XIX des Annales de Mathématiques) indique une méthode que nous modifions comme il suit :

I. Soit S l'aire du *secteur elliptique*, dont le sommet est au centre et dont a est un côté ; le point (x,y), donné sur la courbe, étant l'extrémité du second côté. Soit α' l'arc du secteur circulaire concentrique, de rayon a, répondant à la même abscisse x, et dont l'aire, par suite, est $\frac{1}{2}a\alpha'$: on a vu que $a\text{S}=\frac{1}{2}ab\alpha'$. Soit d'ailleurs α l'arc numérique, de rayon 1, qui mesure l'angle du secteur circulaire ; on aura $\alpha'=a\alpha$ et

$$\text{S}=\tfrac{1}{2}ab\alpha.$$

II. Soit (x,y') l'extrémité de l'arc α' : on sait que

$$1:\sin\alpha::a:y'::b:y\text{ ; d'où } b\sin\alpha=y.$$

Substituant donc l'expression connue de l'arc α en fonction de son sinus y sur b, on aura

$$\text{S}=\tfrac{1}{2}ab\left(\frac{y}{b}+\frac{1}{2}\,\frac{y^3}{3b^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{y^5}{5b^5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\,\frac{y^7}{7b^7}+\text{etc.}\right).$$

Or, $b^2=ap$, p désignant le demi-paramètre ; substituant cette valeur de b^2, réduisant et observant que pour passer à la *parabole* $y^2=2px$, il suffit de poser $a=\infty$; ce qui rend *infiniment petits*, et conséquemment *nuls*, les termes divisés par les puissances de a ; il vient

$$\text{S}=\tfrac{1}{2}a+y\tfrac{1}{6}xy.$$

Ici le centre, sommet du secteur S, est situé à l'infini ; donc ce secteur et le triangle $\frac{1}{2}ay$ sont infiniment grands ; mais leur différence $\frac{1}{6}xy$, *segment* de la parabole, entre la courbe et la corde menée du sommet au point connu (x,y) de celle-ci, est un nombre *fini* et donné. Ajoutant l'aire du triangle rectangle, dont x et y sont les côtés de l'angle droit, savoir $\frac{1}{2}xy$, on aura l'aire de la moitié du *segment* S', limité par la courbe et la double ordonnée y : donc

$$\text{S}'=\tfrac{2}{3}xy.$$

III. Soit tang $\alpha=t$; on a $1:t::x:y$ et $t=y$ sur x. Substituant la valeur de l'arc α en fonction de sa tangente t, savoir $t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+$ etc. ; observant ensuite que, pour passer du secteur elliptique $S=\frac{1}{2}ab\alpha$ au *secteur hyperbolique*, il faut y changer b et y en $b\sqrt{-1}$ et $y\sqrt{-1}$, on aura

$$S=-\tfrac{1}{2}ab(t+\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^5+\tfrac{1}{7}t^7+\text{ etc.}).$$

Or, la série entre parenthèses a pour valeur, comme on sait, la différence des logarithmes ordinaires de $1+t$ et de $1-t$, divisée par 2 fois celui du nombre $e=2,7182818$ etc. Donc, comme ce quotient est *négatif*, il vient

$$S=\frac{ab}{4le}\times l\left(\frac{x+y}{x-y}\right).$$

Telle est donc l'expression numérique du secteur hyperbolique, dont le sommet est au centre et dont les extrémités de l'arc sont le sommet de la courbe et le point (x,y), donné sur elle.

Retranchant cette expression hors de l'aire du triangle rectangle, dont x et y sont les côtés de l'angle droit, il reste la moitié de l'aire S' du *segment* compris entre la courbe et la double ordonnée y : donc

$$S'=xy-2S.$$

Enfin, si l'hyperbole est équilatère, d'où $x^2-y^2=a^2$, il est clair que pour la rapporter à ses asymptotes, nouveaux axes des x et des y rectangulaires, le point (x,y) sera désigné par (x',y') et qu'on aura

$$x\sqrt{2}=x'+y' \text{ et } y\sqrt{2}=x'-y' \text{ ; d'où}$$
$$x+y=x'\sqrt{2}\text{ , } x-y=y'\sqrt{2} \text{ et } x'y'=\tfrac{1}{2}a^2=h^2.$$

Soit T la tranche comprise entre la courbe, une asymptote, l'ordonnée y' du point donné (x',y') et l'ordonnée h du sommet : il est clair que T vaut le secteur S ; car on a $T=S+\frac{1}{2}x'y'-\frac{1}{2}h^2$. Donc

$$T=\frac{h^2}{2e}\times l\left(\frac{x'}{y'}\right)=\frac{h^2}{le}\times l\left(\frac{x'}{h}\right).$$

Différents lieux géométriques.

Nous terminerons ce Mémoire par différentes propositions, assez remarquables, sur les lieux géométriques plans et des trois dimensions; c'est-à-dire sur les *courbes planes* et les *surfaces courbes*.

Courbes I. Dans toute circonférence $y^2=2ax-x^2$, le lieu du pied (x,y) de la perpendiculaire à toute corde, partant de l'origine, menée du pied de l'ordonnée de l'extrémité de cette corde, est la courbe du quatrième degré

$$(y^2+x^2)^2=2ax^3.$$

Cette courbe se discutera plus facilement à l'aide de son *équation polaire;* or, le *pôle* étant à l'origine, et ω désignant l'arc de rayon 1, qui mesure l'angle décrit par le *rayon vecteur r,* depuis l'axe des x, d'où $y=r\sin\omega$ et $x=r\cos\omega$, on a

$$r=2a\cos^2\omega.$$

Cette courbe n'a donc que le seul *axe de symétrie* $2a$: elle limite une sorte de *feuille*, fermée à l'origine, dont l'*aire est les* 5 *seizièmes du cercle proposé.* L'expression de l'aire A cherchée est, en effet, $A=4a^2z\int\cos^4nz$; la somme devant être prise, depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=nz=180^\circ=\pi$, n étant un nombre entier *infini.*

II. La circonférence $y^2+x^2=a^2$ étant tracée, le lieu du pied (x,y) de la perpendiculaire à chaque rayon, abaissée du pied de l'ordonnée de l'extrémité de ce rayon, est la courbe du 6me degré

$$(y^2+x^2)^3=a^2x^4 \text{ ou } r^2=a^2\cos^4\omega.$$

L'aire limitée est les 3 *quarts du cercle proposé;* et cette courbe est une *lemniscate.* On appelle ainsi toute courbe plane, en forme du chiffre 8, dans différentes positions, ayant un *centre*, deux *axes de symétrie*, dont un seul *réel* ou terminé à la courbe. La lemniscate a toujours un *point double* et une double *inflexion* en ce point, qui est le centre. Les lemniscates sont fort nombreuses, et plusieurs sont fournies par les propriétés du triangle rectangle.

Scholie. L'aire limitée par une *courbe polaire* donnée se calcule aisément lorsque le rayon *vecteur r* est fonction, monome ou binome, soit de l'arc ω, de rayon 1, qui mesure l'angle décrit, soit du sinus ou du cosinus de cet angle, pourvu, dans ces derniers cas, que r^2 soit une fonction rationnelle de chacune de ces lignes trigonométriques. Telles seraient les différentes courbes :

$$r^2=a^2\omega=a^2\omega^2=a^2\sqrt{\omega}-b^2\sqrt[3]{\omega^2}=a^2\sin\omega=a^2\cos^2 2\omega=a^2\sin\tfrac{1}{2}\omega=a^2$$
$$\pm a^2\cos\omega=a^2\pm b^2\cos^2 2\omega=a^2\sin\omega\pm b^2\cos\omega=\sin^2\tfrac{1}{2}\omega+\cos\omega=\text{etc.}$$

III. Le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite donnée a, dont les extrémités glissent, l'une sur l'axe des x et l'autre sur l'axe des y rectangulaires, est une *double lemniscate*, dont l'aire est le quart du cercle de rayon a. Ce lieu serait une lemniscate simple, si a variable était l'hypoténuse du triangle rectangle équivalent au carré C donné ; et alors $\frac{1}{2}$C exprime l'aire limitée par la courbe, laquelle par suite est une *courbe carrable.* Enfin, si la somme des côtés de l'angle droit du triangle rectangle, dont a est l'hypoténuse variable, est constante et représentée par m; le lieu du pied est encore une lemniscate, dont l'aire est la moitié du cercle de rayon m.

IV. Le point $(2a,0)$ étant donné sur l'axe des x rectangulaires, on

mène, de ce point une oblique quelconque L à l'axe des y, et de l'origine on mène sur L, la perpendiculaire P, dont le pied (x',y') est sur une circonférence : si l'on prolonge P de $2a$; l'extrémité (x,y) de la longueur $P+2a$ appartient à la courbe

$$(y^2+x^2-2ax)^2=4a^2(y^2+x^2) \text{ ou } r=4a\cos^2\tfrac{1}{2}\omega.$$

L'aire limitée par cette courbe est triple du cercle de rayon a.

Scholie I. On peut calculer l'aire de chacune des deux *lemniscates*, obtenues en prolongeant P, soit de x', soit de y'.

Scholie II. Par le pied (x',y') de P, si l'on mène une parallèle à l'axe des x positifs et si du pied de l'ordonnée y' de l'extrémité de cette parallèle $2a$ ou x' ou y', on mène une perpendiculaire à P; le pied (x,y) de cette perpendiculaire appartient chaque fois à une lemniscate, dont on sait calculer l'aire.

Scholie III. Observons encore que si, par le point donné $(2a,0)$, on mène a l'oblique L, la perpendiculaire égale à y'; l'extrémité (x,y) de celle-ci appartient à la double lemniscate $r^2=a^2\sin^2 2\omega$. (La perpendiculaire pourrait être égale soit à x', soit à $2a$).

V. Si du point $(k,0)$ de l'axe des x rectangulaires d'une ellipse, dont $2a$ et $2b$ sont les axes, on abaisse des perpendiculaires sur ses tangentes; le lieu de tous les pieds (x,y) de ces perpendiculaires est représenté par l'équation

$$(y^2+x^2-kx)^2=b^2y^2+a^2(x-k)^2.$$

C'est donc une courbe algébrique du quatrième degré, que l'on peut discuter et en calculer l'aire A, pour différentes valeurs particulières de k.

1° Si $k=c$; comme $c^2=a^2-b^2$, l'équation devient

$$(y^2+x^2-a^2)[y^2+(x-c)^2]=0;$$

elle représente donc à la fois le foyer positif et la circonférence décrite sur le grand axe, comme diamètre.

2° Si $k=0$, l'équation se simplifie et devient

$$(y^2+x^2)^2=b^2y^2+a^2x^2.$$

Cette courbe, circonscrite à l'ellipse proposée, la touche aux quatre sommets et a plusieurs points d'inflexion. Ce qui est remarquable ici, c'est que l'aire A, limitée par la courbe, s'obtient immédiatement à l'aide de l'*analogie*, comme il suit : si $b=0$, l'aire se réduit aux deux cercles, ayant chacun $\frac{1}{2}a$ pour rayon, et l'on a $A=\frac{1}{2}\pi a^2$. Mais si $b=a$, il vient $A=\pi a^2$. Il faut donc, pour satisfaire à ces deux conditions particulières, qu'on écrive $A=\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$. De sorte que la somme et la différence des aires, limitées par la courbe et par l'ellipse, équivalent respectivement aux demi-cercles, de rayons $a+b$ et $a-b$.

3° Si $k=-a$, il est clair, en changeant x en $x+a$, que la courbe devient

$$(y^2+x^2-ax)^2=b^2y^2+a^2x^2.$$

Si $b=0$, l'aire A devient $A=\pi a^2$; si $a=0$, on a $A=\frac{1}{2}\pi b^2$; et si $b=a$, l'équation polaire donne $A=\frac{3}{2}\pi a^2$. Pour que l'aire A cherchée satisfasse à ces trois conditions particulières, il faut donc qu'on ait $A=\pi(a^2+\frac{1}{2}b^2)$. Et si l'on posait $k=-b$, on trouverait de même l'expression de l'aire A.

4° Pour l'hyperbole, b^2 devient $-b^2$; donc si alors $k=0$, il vient

$$(y^2+x^2)^2=a^2x^2-b^2y^2.$$

Dans ce cas, $c^2=a^2+b^2$; et le lieu des pieds est la *lemniscate* représentée par l'équation polaire

$$r^2=a^2-c^2\sin^2\omega.$$

Ici, pour calculer l'aire A, depuis $\omega=0$ jusqu'à $c\sin\omega=\pm a$, la méthode précédente ne pourrait point s'employer : il faut poser $\omega=nz$, n étant un nombre entier *infini;* chercher ensuite l'expression du v ième *secteur* élémentaire, savoir $\frac{1}{2}a^2z-\frac{1}{2}c\ z\sin^2vz$, d'où

$$A=2a^2nz-2a^2z\textstyle\int\sin^2nz\ ;$$

et l'on trouvera, d'après l'expression de la somme $\int\sin^2nz$, où $nz=\omega$,

$$A=(a^2-b^2)\omega+ab.$$

VI. Soit (x',y') un point quelconque de la circonférence $x^2+y^2=a^2$: si l'on prolonge le rayon en ce point de la longueur x', le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est la courbe composée de quatre branches, égales et opposées deux à deux, chacune en forme de *cœur* et représentée par la quadruple équation polaire $r=\pm a\pm a\cos\omega$. L'aire de chaque branche est les 3 moitiés du cercle proposé.

Scholie I. On aurait la même courbe, si l'on prolongeait le rayon a de l'y' de son extrémité. On pourrait le prolonger d'une longueur égale à la moyenne proportionnelle entre a et x' ou entre a et y'.

Scholie II. Et si le sommet d'un angle droit mobile est au centre de la circonférence proposée, (x',y') étant le point où elle est rencontrée par le premier côté de l'angle ; quelle est l'aire de la courbe décrite par le point (x,y), situé sur le second côté, à la distance $a+y'$ ou $a+x'$ du centre ?

Scholie III. Si la circonférence est $y^2+x^2=2ax$ et qu'on prolonge chaque corde, menée de l'origine, d'une longueur égale à l'x' ou à l'y' de son extrémité ; le lieu de tous les points ainsi obtenus, est la courbe polaire $r=2a(\cos\omega+\cos^2\omega)$, où ω croît depuis 0 jusqu'à $\pm90°$. On peut calculer l'aire limitée.

SURFACES DU SECOND ORDRE I. Toutes les *surfaces du second ordre*, ayant

un *centre*, sont représentées par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1\,, \quad . \; . \; . \; (1)$$

laquelle est aux *axes principaux* ou aux *axes conjugués*, suivant que le trièdre des coordonnées est droit ou non. On sait que cette équation représente l'*ellipsoïde*, l'*hyperboloïde* à une nappe ou l'*hyperboloïde* à deux nappes, suivant que les trois coefficients donnés A, B, C sont *positifs*, ou que C est seul *négatif*, ou enfin que A est seul *positif*. De plus, si $2a$, $2b$ et $2c$ désignent les trois *axes principaux* ou les trois *diamètres conjugués*, sur les axes des x, des y et des z respectifs, on aura

$$Aa^2=1\,,\ Bb^2=1 \text{ et } Cc^2=1.$$

Il importe souvent de calculer les longueurs des trois axes principaux $2a$, $2b$, $2c$; ce à quoi l'on parvient, par les relations précédentes, si le trièdre des coordonnées est *droit*. Mais s'il est *oblique*, soient p, q, r les *cosinus* des angles (xy), (xz) et (yz); soient p', q', r' leurs *sinus*. Si d est un demi-diamètre de l'une quelconque des trois surfaces proposées et qu'on pose $d^2=u$, on trouve, pour calculer les trois demi-axes principaux a, b, c, c'est-à-dire les trois valeurs de $\sqrt{u}$, l'une *maximum*, l'autre *minimum* et la troisième entre ces deux-là, l'équation

$$\begin{aligned}ABCu^3-(AB+AC+BC)u^2+(Ar'^2+Bq'^2+Cp'^2)u\\ -(1-p^2-q^2-r^2+2pqr)=0 \quad . \; . \; . \; . \; (2)\end{aligned}$$

Cette équation fournit immédiatement les trois relations connues entre les diamètres conjugués et les axes principaux.

II. Pour appliquer cette équation, soient α, β, γ les inclinaisons respectives des trois axes des z, des y et des x sur les plans des xy, des xz et des yz; soient d'ailleurs z', y', x' les distances à ces plans d'un point quelconque de l'espace : on aura $z'=z\sin\alpha$, $y'=y\sin\beta$ et $x'=x\sin\gamma$. Cela posé, si l'on cherche le lieu géométrique de tous les points (x,y,z) tels, que le carré donné R^2 soit, 1° la somme des carrés des distances de chacun aux trois plans coordonnés, 2° l'excès de la somme des carrés des distances aux plans des yz et des xz, sur le carré de la distance au plan des xy, 3° enfin, l'excès du dernier carré sur la somme des deux autres; il est clair qu'on aura chaque fois, pour représenter le lieu cherché, une équation de la forme (1), dans laquelle les coefficients A, B, C seront les rapports de $\sin^2\gamma$, $\sin^2\beta$ et $\sin^2\alpha$ à R^2.

Si les angles plans (xy), (xz) et (yz) sont égaux à 60°, d'où $p=q=r=\frac{1}{2}$ et $p'=q'=r'=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, on aura $\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=\frac{2}{3}$: donc, pour l'ellipsoïde proposé, $a=2R$, $b=c=R$; pour l'hyperboloïde à une nappe, $2a=R\sqrt{(1+\sqrt{17})}$, $2b=2R$ et $2c=R\sqrt{(1-\sqrt{17})}$; enfin pour l'hyperboloïde à deux nappes, on a $2a=R\sqrt{(-1+\sqrt{17})}$, $2b=2R\sqrt{-1}$ et $2c=R\sqrt{(-1-\sqrt{17})}$.

On peut encore calculer les axes principaux des trois surfaces, 1° lors-

que l'angle $(xy)=90°$ et l'angle $(xz)=(yz)=60°$, 2° lorsque $(xy)=60°$ et $(xz)=(yz)=90°$. Dans chacun de ces cas, quel serait le lieu géométrique, si l'on devait avoir $x'y'+x'z'+y'z'=R^2$? ou $R^2=x'y'+x'z'-y'z'$? ou enfin, $R^2=x'y'-x'z'-y'z'$?

III. Pour connaître le genre de la surface représentée par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=G\,,\quad . \; . \; . \quad (3)$$

dans laquelle les coordonnées sont rectangulaires ; soit d un demi-diamètre quelconque de la surface proposée et soit $d^2v=G$: il faut donc calculer ses axes principaux, en cherchant le *maximum* et le *minimum* de d^2 ; or, en éliminant d'abord G entre (3) et $vx^2+vy^2+vz^2=G$, ce maximum et ce minimum répondent aux valeurs de v dans l'équation

$$\begin{aligned} v^3-(A+B+C)v^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)v \\ -(ABC+2DEF-CD^2-BE^2-AF^2)=0 \quad . \; . \; . \quad (4) \end{aligned}$$

Cette équation symétrique est facile à retenir : pour l'appliquer à la recherche des axes principaux de la surface

$$4x^2-y^2-z^2+4yz-16x+2y-4z=21\,,$$

les coordonnées étant rectangulaires, il faudra d'abord faire disparaître les termes affectées des premières puissances des variables x, y, z. Or, pour cela, il faut, comme on sait, dériver l'équation successivement par rapport à chacune des coordonnées x, y, z, considérée comme seule variable, et égaler chaque dérivée à zéro ; ce qui donne les trois équations simultanées :

$$8x-16=0\,,\ -2y+4z+2=0 \text{ et } -2z+4y-4=0.$$

Ces équations donnent, pour les coordonnées de la nouvelle origine du système parallèle, $x=2$, $y=1$ et $z=0$: ce sont les coordonnées du *centre* de la surface ; de sorte que ces valeurs réduisent $4x^2-y^2-z^2+4yz-16x+2y-4z-21$ à -36, et que par suite on a, pour l'équation de la surface, *rapportée à son centre*,

$$4x^2-y^2-z^2+4yz=36.$$

L'équation (4) devient par conséquent

$$v^3-2v^2-11v+12=0\,;$$

d'où $v=1$, $v=4$ et $v=-3$, puis $a^2=36$, $b^2=9$ et $c^2=-12$. La surface est donc l'hyperboloïde à une nappe $x^2+4y^2-3z^2=36$. Et l'on peut calculer l'aire de la section faite par le plan $z=x-2$.

PROPOSITIONS. Voici d'autres applications de l'équation (4) au calcul des axes principaux : Les coordonnées rectangulaires de chaque point d'une surface algébrique sont les trois dimensions d'un parallélipipède rectangle P, nécessairement variable, et l'on a cette suite de propositions :



1° Si le carré numérique donné R^2 équivaut à la surface totale de P, tous les points proposés appartiennent à l'hyperboloïde à deux nappes de révolution ; car $2a=2R$ et $2b=2c=2R\sqrt{-1}$.

2° Si R^2 est l'excès de la surface latérale de P sur la somme de ses deux bases, ou réciproquement, on aura chaque fois un hyperboloïde.

3° Si R^2 équivaut au carré fait sur la diagonale de P, plus ou moins la surface totale, tous les points proposés constituent le système de deux plans ou l'hyperboloïde de révolution.

4° Quelle serait la surface, si R^2 devait valoir le carré de la diagonale de P, plus ou moins la double somme des deux bases ? Ou cette double somme moins le carré ? ou bien le carré fait sur la diagonale de P, plus ou moins la surface latérale, ou réciproquement ? ou bien encore la somme des carrés des quatre diagonales de P, plus ou moins la surface totale ? Quelle serait aussi la surface, lieu de tous les points proposés, si l'on devait avoir $z^2+2xy=36$? ou $z^2-2xy=64$? ou enfin, si P devait toujours être équivalent au cube donné 125 ?

Remarquons d'ailleurs que les coordonnées étant rectangulaires dans les deux surfaces concentriques

$$2xy+4xz-2yz=h^2 \text{ et } 4xy+8xz-4yz=k^2\,;$$

on peut calculer les trois axes principaux de chacune et prouver ainsi que ce sont deux hyperboloïdes *semblables*, à une nappe. De plus, si on les coupe par le plan $z=x-y$; non-seulement les deux sections sont semblables, mais de plus l'aire de la projection de la première, sur le plan des xy, est équivalente au cercle de rayon h ; d'où résultent ensuite les aires des deux sections.

Remarquons enfin que, *dans les surfaces du second ordre ayant un centre, la somme algébrique des inverses des carrés de trois diamètres rectangulaires quelconques est une grandeur constante.* On peut même calculer numériquement cette somme dans chacune des surfaces représentées par la double équation

$$x^2+y^2+8z^2-14xy+2x-14y+16z=63=-81.$$

Mais il faudra d'abord écrire les équations aux axes principaux.

IV. Les coordonnées étant rectangulaires, dans les cinq surfaces du second ordre, soit S le *segment* et h sa *hauteur*, à partir de l'origine, la *base* étant parallèle à l'un des plans coordonnés et l'origine étant au *sommet* de la surface. Les plans parallèles à la base de S divisent h en un nombre *infini* n de parties égales à u, d'où $h=nu$, et ils divisent S en n *tranches*, toutes de même épaisseur u infiniment petite ; la v ième de ces tranches, à partir du sommet, n'est donc au fond qu'un *cylindre* droit, dont la mesure est le produit de sa base par u. Cherchant donc la mesure de cette base, d'après l'équation de la surface, on aura l'expression de la v ième tranche T de S ; dans laquelle faisant successivement $v=1$, 2,

$3, 4, \ldots, n$, puis prenant la somme et observant que

$$\int n = \tfrac{1}{2}n^2, \int n^2 = \tfrac{1}{3}n^3, \int n^3 = \tfrac{1}{4}n^4, \text{ etc.},$$

on aura l'expression du volume S, indépendante de n et de u. Appliquons cette méthode aux cinq surfaces, du second ordre, rapportées à leurs axes principaux :

1° Pour l'*ellipsoïde*, où l'on change d'abord x en $x-a$, afin de placer l'origine, qui était au centre, à l'extrémité négative du grand axe $2a$, et où h se mesure sur $2a$, à partir de ce sommet, on trouve

$$a^2\mathrm{T} = \pi bc(au^2v - u^3v^2) \text{ et } a^2\mathrm{S} = \pi bch^2(a - \tfrac{1}{3}h).$$

2° Pour l'*hyperboloïde* à une nappe, où h se trouve sur le demi-axe imaginaire c, à partir de l'ellipse de gorge, il vient

$$c^2\mathrm{T} = \pi ab(c^2u + u^3v^2) \text{ et } c^2\mathrm{S} = \pi abh(c^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

3° Pour l'*hyperboloïde* à deux nappes, h étant le prolongement du demi-axe a réel, on trouve

$$a^2\mathrm{T} = \pi bc(au^2v + u^3v^2) \text{ et } a^2\mathrm{S} = \pi bch^2(a + \tfrac{1}{3}h).$$

4° Pour le *paraboloïde elliptique* $ay^2 + bz^2 = abx$, où $x = h$, on a

$$\mathrm{T} = \pi u^2v\sqrt{(ab)} \text{ et } \mathrm{S} = \tfrac{1}{2}\pi h^2\sqrt{(ab)}.$$

5° Enfin, pour le *paraboloïde hyperbolique* $ay^2 - bz^2 = abx$, où le segment S est limité par la surface, le plan des yz et le plan $x = h$, on trouve

$$3a^2\mathrm{T} = 4u^4v^2\sqrt{(2ab)} \text{ et } 3a^2\mathrm{S} = h^4\sqrt{(2ab)}.$$

Observons que si $h = c$, dans l'hyperboloïde à une nappe, et si $h = a$, dans l'hyperboloïde à deux nappes, il vient chaque fois $\mathrm{S} = \frac{4}{3}\pi abc$, c'est-à-dire *le volume de l'ellipsoïde*, pour lequel $h = 2a$.

6° On voit que, pour calculer le volume du segment S, dans les cinq surfaces du second ordre, ce qui est parfois nécessaire, il faut d'abord calculer les *axes* ou les *paramètres principaux*, comme dans les différentes questions sur les lieux géométriques, que nous allons énoncer. Mais avant, observons que, les coordonnées étant rectangulaires, dans la conique $y^2 = 2px + qx^2$, si S désigne le segment de cette courbe, intercepté par la double ordonnée qui répond à $x = h$, et si d est la distance de l'origine à la droite D, parallèle à l'axe des y et placée hors du segment ; le volume engendré par la révolution de S autour de D, a pour expression

$$\text{vol. } \mathrm{S} = \mathrm{S} \cdot 2\pi d \pm \pi h^2(p + \tfrac{1}{3}qh),$$

le signe + ayant lieu lorsque l'arc de S est *concave* et le signe — quand il est *convexe* vers D.

Ce théorème fournit plusieurs conséquences utiles, faciles à prévoir. Il en résulte le moyen de calculer le *minimum* de l'argent fin employé à la confection d'un vase cylindrique droit, dont la paroi doit avoir partout un millimètre d'épaisseur, tant pour la base elliptique (ou circulaire) et

la surface latérale, que pour le couvercle, demi-ellipsoïde allongé, décrit par la demi-base; le vase devant avoir un litre de capacité intérieure. La base pourrait être un segment de parabole, terminé par la double ordonnée, le couvercle étant le demi-paraboloïde de révolution; etc.

7° En général, le couvercle est une sorte de *voûte*, dont on sait calculer la capacité, d'après le volume de chacun des *onglets cylindriques* qui la composent. Supposons que la *base* de la voûte soit un rectangle donné $4cd$, la *hauteur* étant désignée par h : la voûte est donc composée de quatre onglets cylindriques, de hauteur h commune et de *bases* équivalentes à cd. Soit O l'un de ces onglets, ayant pour *base directrice* le demi-segment de la conique $y^2=2px+qx^2$, pour lequel $x=h$ et $y=c$: on trouve

$$c\cdot O=dh^2(p+\tfrac{1}{3}qh).$$

Pour la parabole, où $c^2=2ph$ et $q=0$, le volume de la voûte est $2cdh$ et se réduit à $\frac{1}{4}m^3$, si $c=d=h=\frac{1}{2}m$. Pour l'ellipse, où $ap=b^2$ et $a^2q=-b^2$; si $d=a$, $c=b$ et $h=a$, le volume de la voûte devient $\frac{8}{3}a^2b$ et se réduit à $\frac{1}{3}m^3$, si $c=d=h=\frac{1}{2}m$. On peut encore examiner le cas de l'hyperbole; et voici maintenant différentes propositions sur les surfaces du second degré.

V. Les coordonnées étant rectangulaires, 1° le plan est le lieu de tous les points tels, que la somme des carrés des distances de chacun aux deux points (2,1,1) et (3,—1,—2) vaut la somme des carrés des distances de ce point aux deux (3,2,1) et (1,1,—1); 2° si la somme des quatre carrés doit valoir 100 ou être un *minimum*, le lieu cherché est une surface sphérique ou son centre.

VI. Si un plan se meut dans l'espace de telle sorte que deux sphères fixes interceptent constamment sur lui deux cercles égaux, ce plan, dans son mouvement, est toujours tangent au paraboloïde de révolution, décrit par la parabole dont l'axe passe par les centres des deux sphères et dont le foyer est le milieu de la droite qui joint ces deux centres. Cette courbe elle-même touche constamment la droite se mouvant de telle sorte que, rencontrant deux grands cercles fixes, dans le plan des xy, ceux-ci interceptent sur la droite mobile deux cordes égales. Et si l'on cherche à quelle surface sont tangents la suite de plans tels, que la somme algébrique des distances de chacun aux m sommets d'un polyèdre donné soit la longueur constante m fois a, on trouve la surface sphérique, ayant a pour rayon et pour centre celui des moyennes distances des m sommets proposés.

Scholie. Ce dernier théorème et son analogue sur un plan sont conséquences immédiates de la théorie des *centres des moyennes distances*, en géométrie. Mais pour démontrer analytiquement ces quatre théorèmes, il

nous suffira de considérer le dernier, la méthode étant analogue pour les trois autres. Soit (x',y') le contact de la droite $y-y'=n(x-x')$ avec la courbe cherchée ; soient k et h les sommes algébriques des ordonnées et des abscisses rectangulaires des m sommets du polygone donné dans le plan des xy : on aura d'abord $k-my'-n(h-mx')=ma\sqrt{(1+n^2)}$. Comme n est inconnu, on observe que, pour la tangente immédiatement consécutive, n se change en $n+v$, v étant infiniment petit, et que par suite le contact (x',y') ne change point ; d'où résulte la valeur de n, etc. (Voyez le tome XX des Annales de Mathématiques, p. 59 et 307).

VII. Les milieux des cordes, interceptées par une surface du second degré, sur toutes les droites menées d'un point donné, appartiennent à une autre surface du second degré, passant par le point donné. Ainsi ce point étant (2,2,0) et les coordonnées rectangulaires, l'hyperboloïde à une nappe $x^2+y^2+3z^2-4xy=18$, fournit l'hyperboloïde à deux nappes $x^2+y^2+3z^2-4xy+2x+2y=0$; l'ellipsoïde $2x^2+y^2+z^2-2xy=36$, fournit l'ellipsoïde *semblable* $2x^2+y^2+z^2-2xy-10x-8x=0$; le cylindre à base elliptique $x^2+y^2+z^2+2xy=18$, fournit le paraboloïde elliptique $x^2+y^2+z^2+2xy-4x-4y=0$; etc.

VIII. La surface sphérique, de rayon a donné, étant rapportée à ses axes principaux ; si l'on prolonge extérieurement le z de chaque point, de la longueur constante p, ou d'une longueur égale, soit au z soit à l'x ou à l'y du même point ; le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est une sphère égale à la proposée, dans le premier cas, et un ellipsoïde, dans chacun des trois derniers. Le volume de l'ellipsoïde est les trois demies de celui de la sphère, dans le second cas ; tandis que dans le 3ᵉ et le 4ᵉ cas, il en est les trois quarts. Et si, à partir de son pied, on prolongeait l'y et le z de chaque point du double de l'x du même point, on aurait encore un ellipsoïde, dont le volume serait les 3 quarts de celui de la sphère. (On pourrait d'abord considérer la surface $x^2+y^2-z^2=a^2$, etc.).

IX. Dans toute surface du second ordre, ayant un centre, le triangle qui joint les extrémités de trois demi-diamètres rectangulaires quelconques, est tangent à la surface sphérique concentrique. Et si $Ax^2+By^2+Cz^2=D$ désigne la surface proposée, rapportée à ses axes principaux ; en passant du système proposé à un autre, aussi rectangulaire, de même origine, le rayon r de la sphère sera donné par $(A+B+C)r^2=D$.

Scholie. Les mêmes calculs prouvent que la somme des carrés inverses de trois diamètres rectangulaires quelconques est une grandeur constante.

X. Le lieu géométrique du sommet d'un trièdre droit mobile, dont les arêtes touchent constamment l'ellipsoïde $16x^2+4y^2+z^2=16$, est un autre ellipsoïde, savoir $20x^2 17y^2+5z^2=84$.

C'est ce qu'on démontre en passant du système proposé à un autre, aussi rectangulaire, d'une autre origine. On peut aisément calculer la différence des deux volumes.

Scholie. On démontre de même que le lieu géométrique du sommet d'un trièdre droit mobile, dont les arêtes s'appuient constamment sur la circonférence $x^2+y^2=36$, est l'ellipsoïde de révolution $x^2+y^2+2z^2=36$; tandis que pour l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, le lieu géométrique est $a^2y^2-b^2x^2+(a^2-b^2)z^2=-a^2b^2$. On peut avoir $a>b$, $a<b$ ou $a=b$. On peut aussi considérer la parabole $y^2=2px$; et alors on aura le paraboloïde de révolution. (Annales de Mathématiques, tome XVIII, p. 230 et suiv.).

XI. Les angles plans du trièdre des coordonnées étant chacun de 60°, peut-on calculer le maximum et le minimum du demi-diamètre d, dans la surface $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=24$? Ou dans celle-ci : $xy+xz+yz=64$?

Scholie. Dans la première, on simplifie les calculs en posant $d^2v=24$ et $2k(v-1)=v+2$; alors on trouve, pour les axes principaux, $2a=2b=2\sqrt{6}$ et $2c=2\sqrt{(-48)}$. On procède de même pour la seconde surface; mais le calcul des axes principaux est généralement fort compliqué, lorsque les coordonnées ne sont pas rectangulaires.

XII. Un point $(2a,0,0)$ étant donné sur l'axe des x rectangulaires; si de ce point on mène l'oblique quelconque L au plan des yz et par le pied (y,z) de cette oblique, la parallèle à l'axe des x, égale, soit à L, soit à $L+y$ ou à $L+y+z$; l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle, appartient chaque fois à l'hyperboloïde à deux nappes, dont on sait calculer les axes principaux et le volume d'un segment S, de hauteur donnée h, sur l'axe des x, contenant l'axe réel. Dans le premier cas, l'hyperboloïde est de révolution et l'on trouve $S=\pi h^2(2a+\frac{1}{3}h)$.

XIII. Par le point $(2a,0,0)$ de l'axe des x rectangulaires, on mène l'oblique quelconque L au plan des yz; puis de l'origine, la perpendiculaire P à L, la rencontrant en un point (x',y',z') d'une surface sphérique; enfin, de ce point, on mène, à l'axe des x, la parallèle R égale, soit à $2a$, soit à x', à y' ou à z' : le lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle est la surface sphérique de rayon a, dans le premier cas; l'ellipsoïde de révolution, dont le volume est double de celui de cette sphère, dans le second; etc. Enfin, si du milieu (a,y,z) de L, on mène à l'axe des x la parallèle $\frac{1}{2}L+y$ ou $\frac{1}{2}L+z$ ou simplement $\frac{1}{2}L$; quels seront chaque fois les trois axes principaux de la surface, lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle ? (Sa longueur pourrait être $\frac{1}{2}L+y+z$).

XIV. Une perpendiculaire à un plan et un point sur celui-ci étant donnés; quel est le lieu géométrique de tous les points tels, que les distances de chacun, à la droite et au point donnés, soient égales entre elles ? (Ici, pour mieux voir le genre de la surface cherchée et simplifier en même temps, il faut prendre la perpendiculaire pour axe des z, le plan pour celui des xy et diriger l'axe des x rectangulaires sur le point donné, qui sera, je suppose, $(3,0,0)$; et alors on verra que le lieu de-

mandé est la surface latérale du *cylindre droit*, à base *parabolique* $z^2=10x$, et dont le volume, pour $x=10$ et $y=12$, est 1600).

Scholie. Si la somme des carrés des distances devait valoir un carré donné, le lieu géométrique serait un *ellipsoïde de révolution ;* tandis que ce serait un *cylindre parabolique*, si 36 était la différence des deux carrés des distances. Mais si l'une de ces deux distances devait être double de l'autre, on aurait un *ellipsoïde* ou un *hyperboloïde de révolution.*

XV. Quel est le lieu géométrique de tous les points tels, que la distance de chacun à l'axe des x rectangulaires, soit moyenne proportionnelle entre la longueur 10 et l'x de cette distance? Quel est le volume limité par la surface résultante et le plan $x=40$? Enfin, quelle est l'aire de la section faite par le plan $2y+2z-x+4=0$?

XVI. Si chaque point d'une surface est tel, que sa distance à l'axe des x rectangulaires, augmentée de 4, soit double de l'x du pied de cette distance ; quel est le volume numérique, limité par la surface, le plan des yz et le plan $x=10$? Calculer aussi l'aire d'un segment de la section faite par le plan $2x-z-3=0$.

XVII. Les coordonnées étant rectangulaires, quel est le genre de surface représentée par $yz=20x$? Peut-on calculer le volume limité par la surface, le plan des yz et le plan $z=10$? Peut-on calculer aussi l'aire de la section faite par le plan des xy, aire comprise entre la courbe résultante et la parallèle $x=12$? Quelle est la surface $x^2=2yz$? ou $x^2=4yz+a^2$?

XVIII. Un plan et un point extérieur étant donnés, quel est le lieu géométrique de tous les points tels, 1° que la distance de chacun au point proposé soit égale à la distance au plan? 2° que la distance au point soit double de la distance au plan? 3° que la distance au plan soit double de la distance au point? 4° que la somme des carrés des deux distances soit équivalente au carré donné 64? 5° Enfin, que la différence des deux carrés, prise des deux manières, soit équivalente au carré donné 36? Peut-on chaque fois calculer l'aire d'un segment de la section faite par le plan $x-y+z=0$?

XIX. Si l'on cherche le lieu géométrique de tous les points tels, que le z de chacun soit la hauteur menée de l'angle droit du triangle rectangle variable, dont l'hypoténuse, partant de l'origine des coordonnées rectangulaires, se trouve sur le plan des xy, et dont le côté opposé à l'origine est constamment double du côté adjacent ; on trouve le cône asymptote de l'hyperboloïde $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=1$. On aurait encore un cône asymptote, si l'angle à l'origine était double de son complément, ou si l'on prolongeait au-delà du sommet de l'angle droit, le côté double d'une longueur égale à la sienne ou égale à sa moitié. Mais si le second segment de l'hypoténuse doit valoir constamment 4, on aura la surface de révolution $z^4=16(x^2+y^2)$, dont le volume, depuis $z=0$ jusqu'à $z=10$, est 125π.

SURFACES ALGÉBRIQUES. Voici plusieurs propositions sur la génération des surfaces Algébriques, de différents ordres :

I. L'oblique quelconque L au plan des yz étant menée par le point $(2a,0,0)$ de l'axe des x rectangulaires; si par ce point, on mène à l'oblique et dans le plan Lx, la perpendiculaire N (parallèle à la perpendiculaire P à L, menée de l'origine, (x',y',z') étant le pied de P); l'extrémité (x,y,z) de N appartient à la surface sphérique, dont $2a$ est le rayon, si $N=2a$; et si $N=x'$, l'extrémité de N appartient, par le changement de $x-2a$ en x, à la surface du 6me degré :

$$(z^2+y^2+x^2)^3=4a^2x^4.$$

C'est une surface de révolution, autour de l'axe des x, décrite par la demi-courbe polaire $r^2=4a^2\cos^4\omega$; et c'est aussi le lieu du pied de la perpendiculaire, à chaque rayon $2a$ de la sphère, abaissée du pied du z de l'extrémité de ce rayon. Le volume limité est les 4 cinquièmes de celui de la sphère de rayon a.

Scholie. On peut aussi calculer l'équation de la surface qui répond aux hypothèses de $N=y',z'$ ou L, etc.

II. Si l'on prolonge de $2a$ la perpendiculaire P, menée de l'origine, sur l'oblique quelconque L, au plan des yz, tirée du point donné $(2a,0,0)$, les coordonnées étant rectangulaires; le point (x,y,z), ainsi obtenu, appartient à la surface

$$(z^2+y^2+x^2-2ax)^2=4a^2(z^2+y^2+x^2).$$

C'est une surface de révolution, autour de l'axe des x, décrite par la courbe polaire $r=4a\cos^2\frac{1}{2}\omega$, depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=180°$.

Scholie. Si P est prolongée de x', l'extrémite (x,y,z) de $P+x'$ appartient à la surface

$$(z^2+y^2+x^2)(z^2+y^2+x^2-2ax)^2=4a^2x^4.$$

C'est encore une surface de révolution, décrite autour de l'axe des x par la demi-courbe polaire $r=2a(\cos\omega+\cos^2\omega)$; et l'on peut calculer l'aire limitée par cette courbe. (On pourrait prolonger P de y', de z', de L, etc.).

III. Observons encore que si du pied du z' de l'extrémité de P, on abaisse une perpendiculaire à P; le pied (x,y,z) de cette perpendiculaire appartient à la surface

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2ax(x^2+y^2).$$

Elle touche à l'origine le plan des yz; elle est coupée, par les plans des xy et des xz, suivant une circonférence et suivant la courbe polaire $r=2a\cos^3\omega$, dont on sait calculer l'aire; etc.

Scholie. Par le pied de l'oblique L et dans le plan Lx, si l'on mène, à cette oblique, la perpendiculaire égale, soit à $2a$, soit à L, à x', à y' ou à z';

on peut chaque fois calculer l'équation du lieu de l'extrémité de cette perpendiculaire.

IV. Si par chaque point (x',y',z') de la surface sphérique, dont a est le rayon, on mène la parallèle b à l'axe des x rectangulaires ; quel sera le lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle, quand on supposera b égale à a, à x', à y' ou à z' ? La parallèle étant égale à a ou à x' ; si du pied du z de son extrémité on abaisse, sur le rayon a, aboutissant en (x',y',z'), une perpendiculaire ; le pied (x,y,z) de celle-ci appartient à la surface

$$(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2-ax)^2=a^2(2x^2+y^2)^2,$$

ou bien à $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2(2x^2+y^2)^2$.

V. Calculer le rayon de la surface sphérique, lieu des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées, de l'origine des coordonnées rectangulaires, sur les droites menées par le point (2,2,4). De plus, si par le pied (x',y',z') de chaque rayon, on mène au plan des xy, la parallèle 8, quel sera le lieu géométrique de l'extrémité (x,y,z) de cette parallèle telle, qu'on ait toujours $x^2=y$?

Scholie. Les propriétés des plans tangents aux surfaces du second ordre fournissent plusieurs problèmes remarquables, sur la génération de certaines surfaces algébriques, problèmes que nous avons considérés, p. 356 et suiv. du traité de géométrie analytique.

VI. La sphère étant rapportée à ses axes principaux ; si l'on prolonge chaque rayon a d'une longueur égale à l'x' de son extrémité (x',y',z'), le lieu géométrique de tous les points (x,y,z), ainsi obtenus, est la surface

$$(x^2+y^2+z^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2+z^2).$$

C'est la surface de révolution, autour de l'axe des x, décrite par la demi-courbe polaire $r=2a\cos^2\frac{1}{2}\omega$, ayant le seul axe de symétrie $2a$, sur l'axe des x. L'aire A, limitée par cette courbe, peut aisément se calculer ; et l'on peut aussi calculer le volume limité par la surface proposée, laquelle est *semblable* à la surface, déjà considérée plus haut.

Mais observons que la courbe polaire a réellement pour équation $r=\pm a\pm a\cos\omega$; elle est donc composée de quatre branches, égales entre elles et opposées deux à deux ; et elle est inscrite dans le carré construit sur $4a$. (On peut calculer l'aire limitée par les parties extérieures des quatre branches : ce calcul donne $\frac{3}{2}\pi a^2+9a^2$).

COURBES POLAIRES. Voici diverses courbes remarquables, que l'on peut représenter par des *équations polaires*, pour les discuter et pour calculer plus aisément les *aires* limitées par ces courbes.

I. Les coordonnées étant rectangulaires et l'origine au centre, soit (X,Y) un point quelconque de la circonférence, dont a est le rayon : si, à partir de l'origine, on porte sur la droite qui la joint au point (X,Y), la longueur X, ou Y, ou X+Y, ou a+X, ou a+Y, ou a—X, ou a+X

$+Y$, ou $a+X-Y$, etc. ; quel est chaque fois le lieu géométrique du point (x,y), ainsi obtenu ?

L'une des courbes cherchées a pour équation

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x+y)^2 ;$$

d'où résulte l'équation polaire

$$r^2=a^2(\cos\omega+\sin\omega)^2 .$$

C'est le système de quatre circonférences, ayant chacune $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ pour rayon, et passant toutes par le centre de la proposée. Mais si l'on *ajoute* toujours entre elles les valeurs absolues de $\cos\omega$ et de $\sin\omega$, l'équation polaire représente uniquement la courbe plane extérieure, composée des quatre demi-circonférences égales, s'arrêtant à la circonférence proposée, où elles forment quatre points de *rebroussement*. La longueur de cette courbe est donc $2\pi a\sqrt{2}$; et quant à l'aire limitée, il est facile de voir, soit directement, soit par l'équation polaire, que cette aire a pour mesure πa^2+2a^2.

Pareillement, en ne considérant que les valeurs absolues de $\sin\omega$ et des $\cos\omega$, l'équation polaire

$$r^2=a^2(\cos\omega-\sin\omega)^2 ,$$

représente la courbe intérieure composée des quatre demi-circonférences restantes : c'est une sorte de double lemniscate, dont l'aire a pour mesure πa^2-2a^2.

II. Les coordonnées étant rectangulaires et l'origine au centre, soit (X,Y) un point quelconque de la circonférence, dont a est le rayon : si, à partir du centre, on porte sur l'axe des y successivement chacune des longueurs X,Y, $X+Y$, $X-Y$, $a+X$, $a-X$, $a+X+Y$, $a+X-Y$, etc. ; quel est chaque fois le lieu géométrique du pied (x,y) de la perpendiculaire abaissée, du point ainsi obtenu, sur la droite passant par le point (X,Y) et l'origine ?

L'une des courbes cherchées a pour équation

$$(x^2+y^2)^2=a^2y^2(x+y)^2 ;$$

d'où résulte l'équation polaire

$$r^2=a^2\sin^2\omega(\cos\omega+\sin\omega)^2 ,$$

Si donc on a égard seulement aux valeurs absolues de $\sin\omega$ et de $\cos\omega$, la courbe est composée de deux branches égales, en forme de *cœur*, opposées au centre du cercle et de la courbe, où celle-ci a une double *inflexion*. Mais si l'on a égard aux valeurs négatives de $\cos\omega$, il en résulte la double lemniscate, représentée par l'équation polaire proposée.

Une autre courbe est représentée par l'équation polaire

$$r^2=a^2\sin^2\omega(\sin\omega-\cos\omega)^2 .$$

On sait calculer les aires limitées par ces deux courbes remarquables.

III. Si, à partir du point (X,Y) ci-dessus, on porte sur le prolongement de l'ordonnée Y, dans l'un ou l'autre sens, successivement chacune des longueurs indiquées dans le premier problème précédent; quel est chaque fois le lieu du pied (x,y) de la perpendiculaire abaissée, du point ainsi obtenu, sur la droite passant par le point (X,Y) et l'origine?

Scholie. Dans les trois problèmes ci-dessus, l'origine pourrait être l'extrémité d'un diamètre $2a$, suivant lequel l'axe des x rectangulaires serait dirigé.

Surfaces polaires. Voici plusieurs surfaces courbes, bien remarquables, que l'on peut aussi représenter par des équations polaires; et l'on peut aisément calculer les volumes limités par celles de ces surfaces engendrées par les révolutions de courbes planes :

Les coordonnées étant rectangulaires et l'origine au centre, soit (X,Y,Z) un point quelconque de la surface sphérique, dont a est le rayon :

1° Si, à partir de l'origine, on porte sur la droite qui la joint au point (X,Y,Z), successivement les longueurs $X, Y, Z, X+Y, X-Y, X+Y+Z, X+Y-Z, a+X, a-Z, a+X+Y, a+X-Y, a+X+Y+Z$, etc.; quel est chaque fois le lieu géométrique de tous les points (x,y,z), ainsi obtenus?

2° Si, à partir de l'origine, on porte sur l'axe des z rectangulaires, successivement chacune des longueurs ci-dessus; quel est chaque fois le lieu géométrique du pied (x,y,z) de la perpendiculaire abaissée, du point ainsi obtenu, sur la droite passant par (X,Y,Z) et l'origine?

3° Si, à partir du point (X,Y,Z) on porte sur le prolongement de son Z, dans l'un ou l'autre sens, successivement chacune des longueurs indiquées (1°); quel est chaque fois le lieu du pied (x,y,z) de la perpendiculaire, abaissée du point ainsi obtenu, sur la droite passant par (X,Y,Z) et l'origine?

Scholie. Dans les trois problèmes ci-dessus, l'origine pourrait être à l'extrémité d'un diamètre $2a$, suivant lequel l'axe des x rectangulaires serait dirigé.

La discussion de ces surfaces, bien que facile et analogue à celle des courbes précédentes, demande cependant quelqu'attention pour en découvrir les différentes *nappes* et la *forme* de chacune.

Notes sur les méthodes.

Dans ce mémoire et dans les deux précédents, nous avons tâché de rendre bien sensible, par différentes applications, non-seulement la *méthode analogique*, mais surtout le *principe d'analogie directe*, lesquels dominent la science du calcul, aussi bien que la science de l'étendue.

La *méthode infinitésimale* ne diffère pas de la méthode analogique et

simplifie celle des *limites* : c'est par analogie que l'on est conduit à regarder toute ligne courbe comme une ligne brisée, composée d'une infinité de côtés, infiniment petits. Telle est, par exemple, la circonférence; car, plus est grand le nombre de sommets du polygone régulier circonscrit au cercle, plus son périmètre a de points communs avec la circonférence; plus il approche de coïncider avec cette courbe; et la coïncidence serait complète, évidemment, si le nombre de sommets était le plus grand possible. L'analogie conduit donc à *regarder le cercle comme le polygone régulier du plus grand nombre de sommets, dont le rayon et l'apothème sont égaux et dont les propriétés sont, par suite, absolument les mêmes que celles de tout polygone régulier*. Il en résulte immédiatement que 1° les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs diamètres; et partant le rapport π de la circonférence à son diamètre est un nombre *constant* et *irrationnel*; 2° tous les cercles sont des figures *semblables*; l'aire de chacun étant le produit du nombre π par le carré numérique de son rayon.

Ces propositions sont conséquences si immédiates, si claires et si rigoureuses du principe d'analogie directe, qu'il y a lieu de s'étonner de ce que ce moyen de recherche ne soit pas encore généralement adopté dans les traités élémentaires de géométrie, à l'exclusion de tout autre, nécessairement plus compliqué et toujours très-obscur, faute de définitions complètes.

Croit-on, par hasard, que les longues et inutiles *réductions à l'absurde*, employées à démontrer ces propositions, puissent apprendre quelque chose aux élèves, qui n'ont pas clairement la notion des grandeurs *incommensurables* entre elles? Ne faut-il pas d'abord la définition de ces grandeurs? Et si l'on possède cette définition, à quoi bon la réduction à l'absurde?

La véritable définition est : deux grandeurs de même nature sont dites *incommensurables* entre elles, lorsqu'elles n'ont d'autre *commune mesure* qu'une quantité infiniment petite x, d'un ordre quelconque. Cette quantité x, toujours inconnue, n'en existe pas moins certainement, puisque deux grandeurs a et b, de même nature ont toujours un *rapport exprimable* ou *inexprimable* exactement en chiffres; chose incontestable et admise par tout les géomètres.

Si l'on disait que les grandeurs a et b sont *incommensurables*, parce qu'elles n'ont absolument aucune mesure commune, il s'ensuivrait qu'elles n'ont absolument aussi aucun rapport; car dès qu'il y a rapport, il y a aussi mesure commune, *assignable*, *inassignable* ou *infiniment petite*; et l'on conçoit que le rapport $a:b$ n'existant pas, il est inutile de s'en occuper.

On est donc forcé, pour être clair et logique, d'admettre la définition ci-dessus des grandeurs incommensurables; ce qui ramène inévitablement à

la méthode infinitésimale, et par conséquent à celles des *parties égales*, dans les proportions. Si, en effet, m et n étant deux nombres entiers, *finis* ou *infinis*, on a $A=mx$ et $B=nx$, d'où $A:B=mx:nx=m:n$; et si l'on démontre ensuite que $C=my$ et $D=ny$, d'où $C:D=my:ny=m:n$; on verra que $A:B=C:D$.

Cette méthode des proportions, très-simple et très-claire, est d'ailleurs complètement exacte, bien qu'on y raisonne sur des communes mesures inconnues : elle devrait seule figurer en géométrie, si elle n'était pas suppléée souvent par le principe d'analogie directe, tout aussi clair et aussi rigoureux, mais plus simple, en certains cas. Cependant, plusieurs auteurs de géométrie, rejetant la réduction à l'absurde, comme inutile et parfaitement incompréhensible, lorsqu'il s'agit de passer du *commensurable* à l'*incommensurable*, distinguent encore néanmoins ce dernier cas : ils pensent éviter les *infinis* en prouvant que les deux rapports cherchés sont compris tous les deux entre deux rapports, ne différant que du nombre 1 sur n, moindre que tout nombre assigné, si petit qu'il soit ; vu que n est un nombre entier, aussi grand qu'on veut : ils en concluent que ces deux derniers rapports sont égaux rigoureusement, et par suite les deux derniers.

Mais admettre que les deux derniers rapports sont rigoureusement égaux, c'est supposer leur différence 1 sur n *infiniment petite* et conséquemment *nulle*, comme elle l'est, en effet, vis-à-vis des grandeurs finies : c'est supposer une commune mesure ; c'est répéter, en le compliquant, le raisonnement fait pour une mesure commune *assignable*. La distinction des deux cas, commensurable et incommensurable, complique donc, fort inutilement, les éléments de géométrie.

La théorie des parallèles, où l'on veut éviter les *infinis*, est tout aussi incompréhensible que la réduction à l'absurde, dans le passage du *rationnel* à l'*irrationnel*; parce que la définition de l'angle, sur laquelle on se base, ne le fait pas connaître tel qu'il est en effet, une *portion plane infinie*. Aussi cette théorie est-elle fort compliquée et fort obscure, lorsqu'on veut se passer du *postulatum* d'Euclide, comme dans diverses éditions de la géométrie de Legendre et notamment la 12me, où il ne parvient qu'à masquer, par de longs raisonnements, les *grandeurs indéfinitésimales*. Est-il possible, par exemple, que l'élève, même le plus intelligent, qui n'a pas la notion de ces grandeurs, comprenne la démonstration, fort compliquée, du théorème sur les trois angles de tout triangle rectiligne, donnée dans cette dernière édition ? Car cette démonstration, fort ingénieuse sans doute, n'en suppose pas moins implicitement que tout angle *infiniment petit* est comme *nul* vis-à-vis de l'angle droit ; ce qui est vrai : mais elle suppose aussi que les côtés d'un angle infiniment petit coïncident ; ce qui ne saurait être ; et ainsi le théorème n'est réellement pas démontré : il ne peut l'être, clairement et complètement, qu'en se fon-

dant sur la théorie des parallèles ; elle-même devant être basée sur la nature infinie de l'angle, pour être simple, claire et complète.

Considérons l'angle droit D et l'angle aigu A extérieur, situés d'un même côté de la droite fixe MN et ayant deux côtés opposés sur cette droite : si l'on fait glisser l'angle droit D sur MN, de telle sorte que l'un de ses côtés glisse sur un côté de A, il est évident, d'après la notion de la ligne droite, que les second côtés de A et de D se couperont toujours, bien que leur intersection unique s'éloigne de plus en plus du sommet, d'abord commun. On est donc ainsi amené au postulatum d'Euclide, savoir que *toute perpendiculaire à un côté d'un angle aigu finit toujours par rencontrer l'autre côté.*

Ce postulatum, ainsi amené, me paraît d'une évidence assez complète et je n'hésiterais pas à le ranger parmi les axiomes, si la nature infinie de l'angle ne permettait de le démontrer rigoureusement. Cependant des géomètres du premier ordre, et Legendre en particulier, pour réduire le plus possible le nombre des axiomes en géométrie, ont voulu démontrer le postulatum ci-dessus ; mais ils n'y ont pas réussi, parce qu'ils n'ont pas voulu non plus considérer *explicitement* les grandeurs infinitésimales, réellement inévitables dans la science de l'étendue.

Je terminerai par les observations, fort judicieuses, que voici (elles sont consignées, tome XX des annales de Mathématiques, p. 288) : « En examinant avec attention la plupart des Traités de Géométrie élémentaire, il semble souvent que leurs auteurs aient pris à tâche de rendre, à dessein, difficile une étude qu'ils auraient dû s'efforcer, au contraire, de mettre à la portée du plus grand nombre. Indépendamment de ces continuelles réductions à l'absurde, dont on pourrait, tout au plus, donner un ou deux exemples en notes, par forme d'échantillon, et dont le moindre inconvénient est de faire perdre tout-à-fait de vue la marche des inventeurs, dans l'investigation des vérités inconnues ; combien n'est-il pas d'autres parties des éléments qui pourraient être traitées d'une manière beaucoup plus naturelle et en même temps beaucoup plus simple ? On dit, en faveur de la pratique contraire, qu'elle est plus propre à développer et à exercer l'intelligence ; mais c'est-là, ce me semble, une erreur manifeste ; et cette pratique ne me paraît propre qu'à faire briller l'adresse des auteurs qui devraient, au contraire, dans la composition de leurs ouvrages, s'oublier constamment, pour ne songer qu'à ceux qu'ils ont dessein d'instruire. Ce qui peut réellement développer et exercer l'intelligence des élèves (leur faire acquérir la science), ce sont des théorèmes et des problèmes que, par forme d'exercice, on leur donne à démontrer et à résoudre (et ajoutons que c'est le véritable moyen de leur inspirer le goût de l'étude). Leur application à retenir exactement des raisonnements et des procédés qu'ils trouvent dans un livre n'exerce uniquement que leur mémoire. Ne vaudrait-il pas beaucoup

mieux, d'ailleurs, leur présenter simplement ce qui est simple de sa nature, et réserver les forces de leur intelligence pour beaucoup d'importantes recherches qu'on ne fait point d'ordinaire figurer dans les éléments, et qui néanmoins devraient y trouver place, parce qu'elles sont, pour la plupart, fondamentales dans la science. »

Le même auteur, assignant la place que la géométrie doit occuper, dans l'enseignement scientifique moyen, ajoute : « quel peut être d'ailleurs le motif de cette gothique et inconcevable obstination, qui fait précéder, dans les écoles, l'étude de l'algèbre par celle de la géométrie? Outre que l'étude de la géométrie exige la connaissance de l'Arithmétique, que l'on ne possède parfaitement que quand on a appris un peu d'algèbre ; comment ne voit-on pas que l'algèbre n'est qu'une langue, un pur instrument, qu'il est fort inutile d'apprendre à manier, lorsqu'on possède déjà les connaissances dont son emploi aurait pu faciliter l'acquisition ? Qu'on fasse de la géométrie à la manière de Monge et de ses disciples, sans aucune sorte de calcul ; qu'on pousse cette géométrie aussi loin qu'on le pourra, j'y souscris de très-grand cœur ; mais qu'on cesse enfin de nous donner pour *géométrie pure* une géométre tout encombrée de proportions, de *componendo* et de *dividendo*, dans lesquels je ne saurais voir que des équations et des éliminations, sous un déguisement suranné. »

Ces observations et d'autres non moins justes, nous les avions faites nous-mêmes, depuis longtemps : elles résument les vues par lesquelles nous avons été guidés dans la composition de nos traités élémentaires, où, par un choix de méthodes, nous avons voulu faciliter l'étude de la science, la rendre plus complète et épargner aux jeunes élèves, par des applications propres à les intéresser, le découragement qu'ils éprouvent à l'aspect d'une longue suite de théories dont ils n'aperçoivent pas le but et dont souvent ils n'ont que des idées confuses, faute de bonnes définitions.

Les meilleurs ouvrages synthétiques de géométrie ne sont pas et ne sauraient être indépendants des signes et des opérations du calcul ; vu que la géométrie n'est pas seulement *graphique*, mais aussi *numérique*, nécessairement. L'expérience prouve d'ailleurs que l'emploi des premiers principes de l'algèbre, lorsqu'il se présente naturellement en géométrie ; non-seulement facilite l'étude de cette science, mais il complète la conviction des élèves, accélère leurs progrès et les prépare, de la manière la plus efficace, aux études supérieures. Car ils se familiarisent ainsi avec la langue des sciences physiques et mathématiques, dont la géométrie est comme la base. On ne doit donc pas se priver du secours de l'algèbre élémentaire, où souvent elle est nécessaire, dans le développement des théories géométriques.

On dira peut-être qu'en agissant ainsi, on fait de l'algèbre et non de

la géométrie. Mais qu'importe, pourvu que les vérités géométriques soient démontrées clairement et simplement ? Si vous refusez le secours de l'algèbre, dans les questions de géométrie où il faut combiner entre elles les *grandeurs numériques*, vous serez obligé d'employer, au lieu de signes algébriques, ceux beaucoup plus longs et beaucoup plus compliqués du langage ordinaire ; et vous ferez, malgré vous, de l'algèbre : seulement ce sera de l'algèbre *parlée ;* elle ne différera de la véritable que par plus de longueur, pas moins de clarté et de facilité.

VII. — *Mémoire sur le genre Diplosiphon.*

Par J. DECAISNE,

AIDE DE BOTANIQUE AU MUSÉUM DE PARIS, CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE BRUXELLES, ETC.

Une plante recueillie en abondance dans les rizières du Cachemir par Victor Jacquemont et qui n'a encore été mentionnée ni décrite par les voyageurs anglais qui ont parcouru cette partie de l'Inde, m'a paru devoir constituer un genre nouveau dont j'expose ici les caractères. Elle appartient à la famille des Hydrocharydées et doit, malgré ses fleurs hermaphrodites, prendre place à côté du *Valisneria.* Le nom générique est tiré des deux enveloppes tubuleuses du périgone.

DIPLOSIPHON. Gen. nov.

Flores hermaphroditi, pedicellati. *Spatha* tubulosa, herbacea, tenuis, ore bidentato. *Perigonium* tubo filiformi, spatham duplò superans, tenue, cùm ovario basi connatum; limbo sexpartito, laciniis oblongis erectis, infernè plus minusve inter se adnatis, exterioribus herbaceis, interioribus petaloideis albis linearibus erectis longioribus. *Stamina* 3, perigonii laciniis exterioribus opposita, loculis contiguis longitrorsum dehiscentibus. *Stylus* filiformis elongatus, cum perigonii tubo connatus. *Stigmata* 3, staminibus alterna, linearia, marginibus præsertim papilloso-hirta. *Ovarium* inferum lineari-oblongum membranaceum, 1-loculare; placentis parietalibus tribus, multiovulatis. *Ovula* anatropa. *Fructus* membranaceus, polyspermus. *Semina* ovata, testâ crustaceâ rugosâ. *Embryo* exalbuminosus, ellipticus, inversus, radiculâ superâ, cotyledone crassâ juxta radiculam biauriculatâ, ibidem fissus plumulamque adpressam exserens. — Herba annua in oryzetis crescens, radiculis fibrosis; folia rosulata, infernè membranacea, parenchymate transversè et verticaliter celluloso-clathrata, nervo in acumen evanescente percursa; flores è foliorum congerie orti, axillares, parvi, albidi.

Diplosiphon oryzetarum. D. floribus folia tenuissime denticulata æquantibus.

DESCRIPT. *Herba* submersa, acaulis, annua, radiculas filiformes, simplices, albidas emittens. *Folia* radicalia, rosulata, lineari-lanceolata, sessilia, imâ basi membranaceo-marginata, sensim longè attenuata, acutissima, margine tenuissimè denticulata, siccata exilia, parenchymate tenui cellulis parvis subquadratis composito, medio venulis septisve verticalibus transversisque secto, subclathratho, nervo crassiori longitudinali. *Flores* axillares, pedunculati, e foliorum congerie orti; pedunculi teretes, post anthesin accrescentes. *Spatha* herbacea, e foliis binis inter se coalitis composita, apice bifida, nervisque percursa. *Perigonii* tubus filiformis, spatham duplò superans, cum ovario connatus, limbus sexpartitus, laciniis exterioribus oblongis, obtusis, concaviusculis, apice incrassatis, herbaceis; interioribus petaloideis, linearibus, obtusis, erectis, longioribus, tenuioribus, albis. *Stamina* foliolis perianthii exterioribus opposita; filamenta teretia v. supernè subattenuata, glaberrima; antheræ adnatæ, basi et apice obtusæ, lineares, biloculares, loculis rimâ longitudinali dehiscentibus; pollen globosum, tenuissimè echinulatum, flavidum. *Stylus* filiformis elongatus, stamina vix superans, cum perigonii tubo infernè connatus, in stigmata tria apice divisus, stigmatibus semiteretibus ad margines præsertim papillis stigmatosis onustis, perigonii lacinias interiores æquantibus. *Ovarium* lineari-oblongum, tenue, 1-loculare, loculis multiovulatis; placentis parietalibus tribus, filiformibus, fructu maturo evanescentibus v. vix conspicuis, e vasis spiralibus unis v. trinis compositis. *Ovula* seriatim verticaliter alterna, anatropa, ovoidea, funiculo brevissimo pendula. *Semina* ovoidea, testâ crustaceâ, rugoso-tuberculosa, hinc ad raphem subcristata; membrana interna tenuissima, venulis vix conspicuis percursa, pallida. *Embryo* inversus, ellipticus, exalbuminosus, carnosus; radicula obtusa supera; cotyledon lineis tenuissimis impressa, crassa, juxta radiculam biauriculata, auriculis imbricatis, tenuibus, iisdem ablatis plumulam adpressam dentiformem exerens.

La plante que je viens de décrire est fort commune dans les vallées qui, des montagnes, descendent dans le bassin de Cachemir. C'est au milieu des rizières, formées en partie par les eaux de l'Archepotte qui s'écoule du Pergunnah de Koulthehâr ainsi que dans les vastes plaines inondées qui, au-delà de Véchâo, s'étendent à Islamabad que Jacquemont l'a recueillie en abondance, en préférant, nous dit-il, marcher jusqu'au genou de son cheval dans l'eau et la boue que de suivre le sommet des petites berges gazonnées et glissantes élevées dans chaque champ pour retenir les eaux d'irrigation. C'est à cette circonstance que nous devons la plante

qui nous occupe, car les voyageurs loin de s'aventurer ainsi au milieu des cultures et des rizières, les évitent au contraire avec soin.

Jacquemont ne donne point la hauteur absolue de cette vallée On pourrait la supposer assez chaude d'après les variétés de Riz à balles et barbes noires qu'il y a récoltées et dont la culture est générale à Madagascar et dans toutes les plaines basses de l'Archipel indien. Cependant le col du Banchal, où se cultivent également ces différentes races, est élevé de 2960 m. La végétation indique une région tempérée. Des épines-vinettes, des Roses, des Coudriers, le Jasmin officinal, des Ronces, des Viormes auxquels se joint un Prunier à fruits jaunes, acerbes, qui, suivant Jacquemont, paraît être la souche de notre prunier de Mirabelle, couvrent la pente des coteaux brisés et s'associent dans les vergers du Castaba ou chef-lieu de Kournarvao aux pommiers et aux noyers. (1)

Cependant la culture du Riz s'avance au-delà de cette zone tempérée ; dans certains points elle dépasse même celle de la vigne et se trouve mêlée au Maïs à l'extrémité de la vallée de Goudjours qui s'unit à la grande chaîne du Pirpenjàl dont les sommets ont environ 5,000 mètres de hauteur absolue.

---

(1) L'aubergine, les concombres, les pastèques, le pourpier, l'ail, une espèce de chou-rave forment le fond des potagers du Cachemir ainsi que dans le midi de la France et le nord de l'Italie. Le poireau, le chou pommé sont inconnus au Cachemir ; l'oseille inusitée quoique fort commune dans la région élevée des montagnes. La coriandre constitue le principal condiment.

VIII. — *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante*,

Par E. LAMARLE,

INGÉNIEUR DES PONTS-ET-CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND.

Constater, s'il en est besoin, l'insuffisance des méthodes généralement adoptées pour les développements de l'analyse transcendante; présenter ensuite une conception abstraite, exempte des inconvénients signalés dans l'emploi des méthodes ordinaires et réunissant néanmoins leurs principaux avantages, tel est le but que nous nous proposons en publiant cet essai.

Parmi les conceptions sur lesquelles se fonde en général l'analyse transcendante, il en est trois que nous devons distinguer. C'est à Leibnitz, Newton et Lagrange que la science en est plus particulièrement redevable. D'autres conceptions se sont produites à diverses époques, mais, comparées à celles que nous avons en vue, elles n'en sont que des modifications secondaires et elles n'exigent point de notre part un examen spécial (1).

Conception de Leibnitz. La conception de Leibnitz, *lorsqu'on lui donne toute l'extension qu'elle comporte*, consiste essentiellement dans la considération simultanée de divers ordres de grandeurs numériques, les quantités d'un même ordre quelconque restant toujours comparables entr'elles, mais étant *infiniment petites* ou *infiniment grandes* par rapport à toute quantité d'un ordre différent. A ce point de vue l'*accroissement* d'une grandeur continuement variable ne commence pas par être une quantité finie de l'ordre de celles que l'on considère en géométrie et en algèbre : il est d'abord infiniment petit et, dans cet état, il prend le nom de différentielle. Si la grandeur est exprimée par $y=f(x)$, à chaque accroissement fini Δx répond un accroissement également fini $y\Delta$. Il en est de même des accroissements infiniment petits et à la diffé-

(1) Pour plus de détails consulter l'ouvrage de Carnot sur la métaphysique du calcul infinitésimal, le cours de philosophie positive de M. Auguste Comte, tome I, page 225 et suivantes, le Cartésianisme par M. Bordas-Dumoulin.

rentielle dx répond la différentielle dy. Infiniment petite par rapport à Δx, la différentielle dx est infiniment grande par rapport à dx^2. Delà les infiniment petits du second ordre, puis ceux du troisième représentés par dx^3 et ainsi de suite à l'infini. Quant à la différenciation, elle ne s'applique pas seulement aux quantités finies : elle s'étend aux infiniment petits eux-mêmes, et la différentielle $d.d....dy = d^n y$ est du même ordre que dx^n.

Le principe fondamental de la méthode des infiniment petits est le suivant :

Deux quantités d'un ordre quelconque sont rigoureusement égales, lorsque leur différence est infiniment petite d'un ordre supérieur.

Il suit de là que les infiniment petits d'un même ordre satisfont à trois conditions : 1° Ils sont comparables entr'eux à la manière des quantités finies ; 2° ils s'évanouissent devant toute quantité d'un ordre inférieur ; 3° ils annulent devant eux toute quantité d'un ordre supérieur. Néanmoins si les infiniment petits de l'ordre n sont pris en nombre infiniment grand, leur somme est de l'ordre $n-1$. La grandeur exprimée par cette somme est, ainsi qu'on le voit, décomposable en infiniment petits de l'ordre n. Delà le nom d'*éléments* que prennent aussi les différentielles.

Ce simple aperçu suffit pour mettre en évidence le vice radical que présente, au point de vue logique, la conception des infiniment petits. Comment concevoir en effet que la différence Δx, supposée continuement décroissante puisse, *avant d'être nulle*, cesser d'être finie ?

L'illusion, dans laquelle sont tombés les partisans des infiniment petits, serait difficilement explicable, si l'on ne tenait compte du prestige que peut exercer sur les esprits une méthode éminemment simple et féconde. Aujourd'hui la plupart des géomètres rejètent ce qu'il y a de contradictoire dans la conception des quantités infinitésimales. Ils s'efforcent cependant de conserver en partie les avantages que présente la méthode fondée sur cette conception.

Carnot appelle quantité infiniment petite, *toute quantité qui est considérée comme continuellement décroissante, tellement qu'elle puisse être rendue aussi petite que l'on veut, sans qu'on soit oblige pour cela de faire varier celles dont on cherche la relation* (1).

(1) Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal, page 19.

Suivant MM. Poinsot et Cauchy, *un infiniment petit n'est qu'une quantité variable, qui a zéro pour limite, qui peut décroître indéfiniment sans s'arrêter à une valeur appréciable, une quantité qui, prise isolément, peut être conçue plus petite que toute quantité donnée.* (1)

En admettant ces définitions l'on reconnaît immédiatement qu'elles s'appliquent aux différences finies tout aussi bien qu'aux différentielles proprement dites. On objectera peut-être que les différences ne prennent le nom de différentielles qu'en parvenant à un certain degré de petitesse, à partir duquel elles ne font d'ailleurs que décroître encore. Mais comment serait-il possible d'établir ainsi une ligne de démarcation entre les différences ordinaires et les différentielles? les unes et les autres peuvent être prises aussi petites que l'on veut, mais elles n'en demeurent pas moins ce qu'elles sont respectivement, des différences ou des différentielles.

Quel que soit au reste le mérite de ces définitions l'on retrouve dans le système qu'elles servent à fonder les infiniment petits de tous les ordres et l'on démontre aisément que, si des infiniment petits d'ordres différents figurent ensemble dans une même équation, chaque groupe comprenant les infiniment petits d'un même ordre est nul séparément. Delà résulte le théorème que nous avons rappelé ci-dessus comme constituant le principe fondamental de la méthode des infiniment petits. Considérons en elles mêmes quelques règles particulières dérivant de ce principe. En voici d'abord une :

Deux quantités finies qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite sont rigoureusement égales.

Convient-il, dans une science éminemment positive et d'une exactitude absolue, de poser une règle dont les termes impliquent contradiction?

En voici une seconde.

Lorsque l'accroissement de la variable est infiniment petit la différence de la fonction est égale à la différentielle.

Cette règle donne lieu à la même observation que la précédente. On sait en effet que la différence et la différentielle sont toujours égales, ou généralement inégales, indépendamment de toute valeur particulière, grande ou petite.

---

(1) Leçons du calcul différentiel, par M. l'abbé Moigno. Introduction page 25.

Qu'on ne se méprenne point sur la portée de nos objections, nous ne contestons point l'exactitude définitive des résultats auxquels on peut être conduit par l'application des règles précédentes. Ce sont ces règles que nous attaquons, parce que leur énoncé manque de rigueur et qu'il se prête à de fausses interprétations. Veut-on traduire ces énoncés et leur rendre leur signification réelle? tout devient rigoureux, mais on rentre dans les méthodes purement algébriques et l'on perd les avantages que l'on a particulièrement en vue dans l'emploi des infiniment petits.

Nous avons supposé tout à l'heure une équation dans laquelle figuraient ensemble plusieurs groupes d'infiniment petits appartenant à des ordres différents. La présence simultanée de plusieurs de ces groupes dans une même équation, accuse l'imperfection des moyens employés pour la traduction du problème à résoudre. On ne peut contester que chaque groupe distinct soit nul séparément, mais cette propriété subsiste indépendamment du moyen indirect à l'aide duquel on la constate. S'il faut une démonstration pour l'établir, c'est qu'il y a insuffisance dans les notions qu'on possède et dont on fait usage.

Prétendre que les infiniment petits constituent des ordres particuliers de grandeurs, c'est, selon nous, les réduire à des êtres purement chimériques. Envisage-t-on différemment les quantités infinitésimales? elles ne sont plus en réalité que des grandeurs algébriques ordinaires. Pourquoi rompre alors l'unité des sciences mathématiques et laisser subsister ensemble des règles contradictoires? Nous admettons qu'il en résulte certaines facilités de calcul. Nous admettons en outre que l'exactitude des résultats définitifs n'en est point altérée. Néanmoins la rigueur du langage disparaît et c'est là plus qu'un inconvénient, c'est un danger réel. Ne faut-il pas en effet que la forme elle-même puisse être mise à l'abri de toute objection sérieuse, et, s'il n'en est pas ainsi, comment affirmer que le fonds demeure inattaquable?

Quoiqu'il en soit, il ne s'agit pas ici d'une question nouvelle et, si nous prenons pour point de départ les opinions généralement établies, nous pouvons nous borner à les résumer de la manière suivante :

L'existence réelle des infiniment petits est inadmissible.

L'emploi des quantités dites infiniment petites, peut être utile comme moyen d'investigation, mais il ne constitue point une méthode vraiment algébrique, et il n'est susceptible de devenir

rigoureux qu'en perdant l'avantage qu'il offre d'être commode et expéditif.

Conception de Newton. L'analyse transcendante, telle que Newton l'a conçue, peut être présentée sous plusieurs formes différentes. Nous distinguerons en particulier *la méthode des premières et dernières raisons* ou en d'autres termes, *la méthode des limites.*

Lorsque l'on considère le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, et qu'on fait converger vers zéro les deux termes de ce rapport, on remarque que le rapport converge en même temps vers une valeur déterminée. C'est cette valeur qui prend le nom de première et dernière raison ou celui de limite. En général elle est exprimée par une fonction particulière de la variable. On prouve d'ailleurs que cette fonction dérive de la fonction donnée, toutes deux s'impliquant l'une l'autre.

Cela posé, l'on conçoit qu'au lieu d'opérer directement sur certaines quantités variables, l'on puisse employer comme auxiliaires les limites de leurs accroissements. D'un autre côté une même détermination est susceptible de s'appliquer, comme limite, aux accroissements de grandeurs essentiellement différentes. On peut donc aussi choisir parmi ces grandeurs celles qui offrent le plus de facilité pour le but qu'on se propose, et la substitution des unes aux autres devient une des ressources les plus précieuses du calcul des limites. Tel est au point de vue qui nous occupe, l'esprit général de l'analyse transcendante.

L'idée de limites, bien que remarquable par sa netteté et sa justesse, est peut être une idée étrangère, dont les théories analytiques devraient rester indépendantes. Telle était la pensée de Lagrange. Néanmoins la méthode fondée sur cette conception nous paraît purement algébrique, et si nous la disons insuffisante, c'est à raison des difficultés qu'elle entraine dans la plupart des applications. Ces difficultés sont assez connues pour que nous n'ayons pas à insister sur ce point. Disons toutefois qu'on s'est efforcé de les atténuer en renonçant à la notation que la méthode des limites comporte essentiellement et en suppléant cette notation par les caractéristiques de la méthode infinitésimale.

Au premier abord il ne paraît pas facile d'exprimer nettement ce que sont les différentielles dans la méthode des limites. Cependant si l'on observe que l'accroissement de la fonction se compose en général de deux termes, l'un égal au produit de l'accroissement de la variable par la fonction dérivée, l'autre, formé moins simple-

ment, mais possédant la propriété de décroître indéfiniment par rapport au premier, à mesure que les accroissements sont supposés de plus en plus petits, rien n'empêche de considérer isolément la première partie de la différence et de lui donner le nom de différentielle. Dès lors la notation de Leibnitz se trouve introduite dans la méthode des limites, et néanmoins cette méthode demeure rigoureusement exacte.

Les différentielles étant définies, comme nous venons de le faire, il reste à examiner si cette définition porte en elle quelque germe susceptible de développements ultérieurs. Elle est algébrique, elle satisfait l'esprit et le repose; mais réduite à la simple traduction d'un fait qu'elle n'explique point et dont le sens échappe, elle se trouve à l'avance frappée de stérilité. Cependant, telle est la puissance du symbole, qu'il ne peut être adopté sans qu'il n'en résulte certaines simplifications de calcul. Sous ce rapport il y a avantage à transporter la caractéristique différentielle dans la méthode des limites, mais ce n'est là qu'une amélioration restreinte, et la difficulté des applications n'est pas sensiblement diminuée.

L'adoption d'un même symbole établit entre la méthode des limites et la méthode infinitésimale une certaine confusion. Loin de l'éviter l'on cherche en général à la mettre à profit, le but qu'on se propose étant de combiner les avantages spéciaux que présente chacune des deux méthodes. Il est visible qu'une combinaison de ce genre peut offrir quelques facilités, mais elle paraît peu rationnelle et mieux vaudrait, semble-t-il, s'en tenir à une méthode unique au lieu d'en réunir plusieurs dans un système batard et vicieux.

Indépendamment de la méthode des limites, il est une autre forme distincte sous laquelle la conception de Newton peut être développée. Cette forme particulière constitue le calcul des fluxions : elle dérive de la notion générale des vitesses, les fluxions étant les vitesses relatives de plusieurs accroissements simultanés, pris à leur origine. Dans ce calcul les fluxions jouent le rôle des différentielles : elles ont en réalité la même signification et le même symbole leur est applicable.

Ici les différentielles sont nettement définies, mais c'est au moyen d'une idée étrangère, l'idée de la vitesse. Cette idée est simple sans doute, mais elle est dépourvue de la généralité abstraite que les diverses applications réclament. En certains cas elle peut être employée directement; en d'autres elle exige qu'on procède par voie d'analogie; le plus souvent elle n'est point une aide et elle devient un véritable obstacle.

En résumé le calcul des fluxions n'est pas supérieur à la méthode des limites. L'avantage qu'il offre de se prêter immédiatement à la notation de Leibnitz est racheté par les difficultés qui naissent du sens restrictif attribué au symbole différentiel. A cet égard l'absence de toute signification précise peut être préférable à une détermination trop particulière. Dans un cas comme dans l'autre les inconvénients sont nombreux. Nous avons signalé ceux que présente la méthode des limites et nous avons dit qu'ils la rendaient insuffisante. La même observation subsiste pour le calcul des fluxions.

Conception de Lagrange. La conception de Lagrange est purement algébrique. Elle repose sur la considération de la formule fondamentale,

$$f(x+i)=f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{1\cdot2}f''(x)+\frac{i^3}{1\cdot2\cdot3}f'''(x)+\text{ etc.}$$

Dans cette formule les dérivées successives sont impliquées l'une par l'autre et toutes ensemble par la fonction primitive $f(x)$. Il suit de là que les dérivées peuvent être employées comme auxiliaires, et la dérivation comme un artifice de calcul, analogue aux développements en série, mais plus général et par conséquent plus fécond.

Cette conception est grande et simple. Toutefois elle a son côté faible et malgré les brillants travaux de Lagrange, elle reste impuissante à fonder une méthode propre aux applications. Cette impuissance subsiste, alors même qu'on introduit le symbole différentiel dans le calcul des fonctions dérivées. Pour s'en rendre compte, on observera qu'il ne suffit point d'établir le fait d'une dépendance mutuelle et réciproque entre la fonction et sa dérivée. Ce qui importe pour la facilité des applications, c'est de saisir le sens de ce fait, et de puiser les ressources dont on a besoin dans l'interprétation dont il est susceptible.

On sait comment les dérivées de Lagrange coïncident avec les limites de Newton et comment elles se lient aux différentielles de Leibnitz. Les points de vue diffèrent pour chacune de ces trois conceptions. Quant aux quantités auxiliaires introduites dans le calcul, elles sont toujours les mêmes et l'on a généralement

$$f^n(x)=Lim.\frac{f^{n-1}(x+\Delta x)-f^{n-1}(x)}{\Delta x}=\frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Il n'est pas besoin, pensons nous, d'insister davantage sur les consiérations qui précèdent. Depuis longtemps déjà, l'opinion s'est

formée sur les avantages et les inconvénients respectifs que présente chacune des trois méthodes généralement adoptées pour les développements de l'analyse transcendante. L'une, la plus simple de toutes, repose sur une conception inadmissible. Les autres ne présentent pas ce vice radical, mais elles sont moins propres aux applications et tant de difficultés surgissent dans leur emploi qu'on renonce presque toujours à s'en servir exclusivement. La question se trouvant réduite à ces termes, nous croyons être en droit de conclure que les méthodes dont il s'agit ne réalisent point suffisamment toutes les conditions désirables.

Exposé général d'un point de vue nouveau. Considérons d'abord une courbe plane, supposée continue. Soit

$$y=f(x)$$

l'équation de cette courbe et m l'un de ses points. Si l'on recherche comment, à partir de ce point, la continuité s'établit sur la courbe, l'on voit que c'est *nécessairement* (1) suivant une direction déterminée. Cette direction prend par rapport à la courbe le nom de *direction tangentielle*. En général elle varie continuement d'un point à un autre, et, si rapprochées que soient les deux extrémités d'un arc curviligne, elle ne peut être constamment la même pour tous les points intermédiaires.

Imaginons que, cessant de varier à partir du point m, la direction tangentielle devienne permanente. Dans cette hypothèse la continuité *s'établit et persiste* suivant une seule et même direction. C'est donc une droite qui se substitue à la courbe. Cette droite est nommée tangente.

Soit x, y, les coordonnées du point m, et $x+\Delta x$ l'abcisse d'un autre point choisi comme on voudra. A l'intervalle Δx répondent en général deux accroissements de l'ordonnée y. L'un est relatif à la tangente, l'autre à la courbe. Pour les distinguer nous désignerons le premier par dy, le second par Δy.

(1) Il est une condition générale qui régit tout déplacement d'un point dans l'espace. Elle consiste en ce que nul déplacement ne peut se produire, sans qu'il n'y ait en même temps détermination complète de la direction suivant laquelle *il commence*. Que cette direction soit constante ou bien qu'elle varie continuement, elle n'en fixe pas moins le mode d'après lequel la continuité s'établit à l'origine de la ligne décrite.

S'agit-il de la tangente, on a

$$\frac{dy}{\Delta x}=\psi(x).$$

Cette relation demeure invariable indépendamment de toute valeur particulière attribuée à l'intervalle Δx. La propriété qu'elle exprime subsiste à l'*origine même* de l'accroissement dy.

S'agit-il de la courbe, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

et, si petit que soit l'intervalle Δx, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne cesse pas de varier continuement.

On conçoit à priori que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ doit converger vers la limite exprimée par $\psi(x)$, à mesure que Δx converge vers zéro. Néanmoins il y a lieu d'observer que si la suite des valeurs dont il est susceptible se rattache par voie de continuité à la limite $\psi(x)$, cette limite elle même reste en dehors de la suite.

Transportons-nous par la pensée à l'origine des accroissements Δy, Δx. Une loi déterminée régit la génération de ces accroissements, *alors que partant de zéro, ils prennent tous deux naissance*. Cela résulte de ce que l'extrémité de l'ordonnée est assujettie à rester sur la courbe. On voit d'ailleurs que cette loi dépend essentiellement de la direction suivant laquelle la continuité s'établit à partir du point que l'on considère. *Or ce n'est point altérer la loi dont il s'agit que de la supposer permanente :* elle a donc pour expression

$$\frac{dy}{\Delta x}=\psi(x).$$

L'accroissement dy n'est, relativement à la tangente, qu'une différence ordinaire. Par rapport à la courbe il est dit *accroissement différentiel* et il se substitue à l'*accroissement effectif* Δy, lorsque, soustraite à tout changement, la direction tangentielle est supposée constante à partir du point m. Mais se placer dans cette hypothèse, *c'est admettre que la loi de génération des grandeurs* Δy, Δx *persiste dans la détermination particulière qu'elle affecte à leur origine : c'est dégager cette loi des modifications qu'elle subit dans l'intervalle* Δx *et l'assujettir à se développer en demeurant permanente.* Telle est donc aussi la signification générale qu'acquiert en réalité la substitution du symbole différentiel à la caractéristique Δ.

En regardant la fonction comme l'ordonnée d'une courbe dont l'abcisse serait exprimée par la variable indépendante, nous avons eu pour objet de rendre plus facile à saisir notre conception fondamentale. Ce mode particulier de représentation offre à cet égard certains avantages, et il n'ote rien à la généralité des résultats, puisqu'il est susceptible de s'appliquer sans aucune exception, à toute fonction supposée continue. Quoi qu'il en soit, les notions qui précèdent ne sont point suffisamment abstraites. En s'y arrêtant, on s'exposerait à entraver les applications par l'interposition constante d'une idée étrangère. Laissons donc l'image de la courbe et procédons plus directement.

Étant donné la fonction continue $y=f(x)$, l'on en déduit

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Et l'on reconnaît aisément que, pour toute valeur particulière affectée par la variable, Δy est fonction continue de Δx.

La dépendance mutuelle, existant entre les accroissements $\Delta y, \Delta x$, subsiste, sans être interrompue, jusqu'à l'origine même de ces accroissements. C'est donc, l'un par l'autre, qu'ils s'engendrent tous deux à partir de zéro. Considérons cette génération simultanée, *alors qu'elle commence* et observons qu'elle est nécessairement régie par une loi déterminée. La loi dont il s'agit est dite *loi de génération*. En général elle n'est pas constante quel que soit x, et son expression numérique dépend de la valeur que la variable affecte à l'origine des accroissements.

Soit une valeur quelconque attribuée à la variable : *la loi de génération* prend une détermination particulière et l'on peut d'ailleurs concevoir qu'elle persiste dans cette détermination. En ce cas certains accroissements résultent du développement continu de la loi, *supposée permanente*, et pour un même intervalle Δx, ils diffèrent en général des accroissements effectifs exprimés par Δy. De là *la différentielle et la différence*. Toutes deux sont relatives à la fonction :

La différentielle est l'accroissement pris dans l'hypothèse où la loi de génération serait permanente à partir de la valeur attribuée à la variable.

La différence est l'accroissement effectif. Elle ne dépend pas seulement de l'expression particulière que la loi de génération affecte à l'origine des accroissements : elle dépend en outre des modifications continues que cette loi subit dans l'intervalle que l'on considère.

La définition de la différentielle donne immédiatement

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

Elle s'étend d'ailleurs à tous les ordres, la différentielle de l'ordre n étant ce que devient la différence du même ordre, lorsqu'on suppose permanente la loi qui en régit la génération initiale.

Tel est le sens de l'équation

$$d^n y=f^n(x)\Delta x^n.$$

Ce sont donc toujours les mêmes quantités auxiliaires qui se trouvent introduites dans le calcul. Quant à la méthode, nous verrons tout à l'heure qu'elle se prête aux applications avec une grande facilité.

Les différentielles ne sont, comme on vient de l'établir, que des différences ordinaires prises dans une certaine hypothèse. L'équation différentielle exprime la génération qui répond à cette hypothèse pour chaque valeur attribuée à la variable. De là résulte tout une série d'applications.

Le système des axes coordonnées étant rectangulaire ou oblique soit d'abord une courbe plane

$$y=f(x).$$

L'équation différentielle

$$dy=f'(x_0)dx$$

est en *différences ordinaires* l'équation d'une ligne qui touche la courbe $y=f(x)$ au point (x_0, y_0). Cela résulte de ce qu'en supposant permanente la loi de génération des grandeurs Δy, Δx, l'on ne peut altérer la direction suivant laquelle la continuité s'établit à l'origine de ces accroissements.

Considérant cette ligne et substituant aux différentielles les différences qu'elles expriment, il vient

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

c'est-à-dire l'équation d'une droite. La ligne dont il s'agit est donc la tangente elle-même.

Soit ensuite une courbe quelconque dans l'espace

$$x=\phi(z)$$
$$y=\psi(z)$$

les mêmes considérations donnent pour les équations de la tangente

au point (x_0, y_0, z_0)

$$dx=\phi'(z_0)dz$$
$$dy=\psi'(z_0)dz$$

c'est-à-dire

$$x-x_0=\phi'(z_0)\cdot(z-z_0)$$
$$y-y_0=\psi'(z_0)\cdot(z-z_0)$$

Tout accroissement effectif pris par rapport à la tangente, est accroissement différentiel par rapport à la courbe. Si donc on désigne par s la longueur d'un arc mesuré sur la courbe et par α, β, γ les angles que la tangente fait avec les axes coordonnés *supposés rectangulaires* il vient en vertu des propriétés de la droite.

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$
$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}$$
$$\cos\beta=\frac{dy}{ds}$$
$$\cos\gamma=\frac{dz}{ds}$$

Ainsi définie, la tangente fixe relativement à la courbe et pour le point que l'on considère la direction suivant laquelle la continuité s'établit. S'il y a déplacement d'un point sur la courbe, c'est en suivant cette direction que le point arrive à la position qu'il occupe : c'est aussi suivant cette même direction qu'il en sort.

Dans la méthode des limites on définit la tangente la limite des sécantes. Dans la méthode des fonctions dérivées la tangente est une droite, telle qu'entr'elle et la courbe on n'en peut mener aucune autre. Ces définitions ne montrent pas pourquoi c'est suivant la tangente à la courbe qu'il décrit que s'échappe un point matériel, lorsqu'on le soustrait tout à coup aux actions qui le sollicitent. Il n'en est pas de même de notre définition ; elle pénètre plus avant dans l'essence de la courbe et elle ne pêche pas par défaut de rigueur comme celle qui se fonde sur la considération des infiniment petits.

Soit encore une surface

$$u=F(x,y,z)=0$$

et sur cette surface un point quelconque (x_0, y_0, z_0). Il est un lieu géométrique déterminé par l'ensemble infini des directions suivant lesquelles à partir de ce point il y a continuité par la surface. Quel-

que soit ce lieu, il reste le même, lorsque, supposant permanente la loi de génération des grandeurs $\Delta x, \Delta y\ \Delta z$, l'on substitue à la surface donnée, celle qui a pour équation aux différences ordinaires.

$$\frac{du_0}{\Delta x_0}dx+\frac{du_0}{\Delta y_0}dy+\frac{du_0}{\Delta z_0}dz=0$$

c'est-à-dire

$$(x-x_0)\frac{du_0}{\Delta x_0}+(y-y_0)\frac{du_0}{\Delta y_0}+(z-z_0)\frac{du_0}{\Delta z_0}=0.$$

Or cette équation appartient à un plan. Elle exprime donc le lieu géométrique lui-même. On le nomme plan tangent.

Considérons tant de courbes qu'on voudra tracées sur la surface et passant par le point de contact du plan tangent. A partir de ce point la continuité s'établit sur chaque courbe suivant la direction fournie par la tangente. Lieu géométrique de ces directions, le plan tangent contient toutes les tangentes.

Soit, pour dernier exemple, la détermination du rayon de courbure dans les courbes planes.

Lorsque la continuité s'établit sur une courbe, c'est d'abord suivant une direction déterminée. Si cette direction persistait, la ligne engendrée serait droite. En général la direction ne persiste pas et elle varie avec continuité. De là nait la courbure : elle résulte des modifications continues subies par la direction tangentielle.

Soit ω l'angle qu'une tangente quelconque à la courbe $y=f(x)$ fait avec l'une des abscisses. On a généralement

$$\omega=\text{arc. tang.}\, f'(x).$$

Quant à l'équation différentielle

$$d\omega=\frac{f''(x_0)}{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}ds$$

elle s'applique à la génération simultanée des accroissements angulaire et arcuel. Prise à son origine, la génération de ces accroissements est régie par une loi déterminée. L'équation différentielle répond au développement de cette loi, *supposée permanente*, et elle exprime, *en différences ordinaires*, l'équation de la ligne qui résulte de ce développement.

Considérant cette ligne et substituant les différences aux diffé-

rentielles, il vient

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta s}=\frac{f''(x_0)}{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\text{Cons}^{\text{te}}.$$

En ce cas deux arcs quelconques, égaux en longueur, sont toujours superposables. La courbure est donc uniforme et la ligne engendrée une circonférence de cercle ayant pour rayon

$$\rho=\frac{\left(1+f'(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}.$$

Le cercle ainsi déterminé a en tous ses points même courbure que la courbe donnée au point que l'on considère. On le nomme *cercle osculateur* et son rayon *rayon de courbure*. En général la courbure de la courbe varie d'un point à un autre. Dans tous les cas elle est mesurée par le rapport $\frac{1}{\rho}$ et le changement de direction, pris à son origine, s'effectue sur la courbe de la même manière qu'en un point quelconque du cercle osculateur. Ajoutons, comme corollaire :

Lorsque plusieurs courbes ont en un point commun même tangente et qu'en outre les dérivées du second ordre affectent même valeur particulière, ces courbes ont en ce point même courbure.

Cette conséquence peut s'établir directement. En effet pour une même valeur quelconque de la dérivée $f'(x_0)$ la courbure est complètement déterminée par la loi de génération

$$df'(x)=f''(x_0)\cdot dx.$$

S'il s'agissait d'une courbe à doube courbure : on observerait, 1° que la 2me courbure nait des modifications continues que subit incessamment le plan de 1re courbure ; 2° que, supposer permanentes à partir d'un point quelconque les lois qui déterminent en ce point les deux courbures, c'est substitüer une hélice à la courbe que l'on considère. Cette hélice est dite hélice osculatrice : elle est pour les courbes à double courbure, ce que le cercle osculateur est pour les courbes planes.

On voit, d'après ces exemples, quels avantages particuliers résultent du sens nouveau attribué au symbole différentiel. Que l'on compare les solutions précédentes à celles que fournissent en général les méthodes ordinaires, et l'on devra convenir que, sans avoir rien perdu sous le double rapport de la facilité des déductions et de la rigueur algébrique, nous sommes parvenus à acquérir des notions plus précises et plus approfondies. Toutefois nous avons à peine

indiqué l'extension que comporte notre conception fondamentale. Un principe en dérive sur lequel l'application de l'analyse transcendante aux questions de géométrie et de mécanique se fonde généralement. Cherchons à mettre ce principe en évidence.

En posant l'équation

$$dy=f'(x)dx.$$

l'on exprime ce que devient, à partir d'un état quelconque de la variable, l'accroissement de la fonction, lorsque la grandeur, représentée en nombre par $f'(x)$, se trouve soustraite aux changements qu'elle subit dans l'intervalle dx et assujettie à conserver dans cet intervalle la valeur numérique qu'elle affecte à l'origine. De là résulte le principe suivant :

Étant donné une génération quelconque, à laquelle concourt une grandeur représentée numériquement par c, *si, pour chaque valeur* constante *affectée par cette grandeur*, l'on a

$$\Delta y=c\Delta x. \qquad (1)$$

l'on peut en conclure immédiatement, *pour toute génération qui ne diffère de la précédente qu'en ce que la grandeur* c devient continuement variable

$$dy=cdx. \qquad (2)$$

En effet l'équation (2), où l'on a par hypothèse $c=\phi(x)$, s'applique *avec le sens de l'équation* (1) à la suite continue des valeurs exprimées par $\phi(x)$. Elle n'est donc, par rapport à cette suite, que *la traduction littérale et l'expression complète*, de la propriété qui subsiste en vertu de l'équation (1) où c est constant, mais supposé quelconque.

En d'autres termes, il est manifeste, au point de vue algébrique, que les équations (1) et (2) sont impliquées l'une par l'autre, l'équation (2) n'étant autre chose que *l'énoncé direct et explicite* de la condition relative aux diverses valeurs que peut prendre la constante c, condition implicitement renfermée dans l'équation (1).

Le principe que nous venons d'établir est une conséquence immédiate de nos premières définitions, conséquence aussi simple qu'elle est rigoureuse. Il nous paraît d'ailleurs que ce principe a une grande portée et une haute importance.

Concevons que l'on se propose d'exprimer une loi par la traduction algébrique des effets qui répondent à son développement continu.

En général, certaines grandeurs, connues à priori, concourent à la génération des effets qu'il s'agit de calculer, et c'est parce que ces grandeurs varient, c'est parce que leurs expressions numériques changent incessamment, que le problème à résoudre est rendu difficile. Ce point admis, la question se trouverait singulièrement simplifiée s'il suffisait de la traiter directement pour le cas où (le mode de génération restant le même) les grandeurs dont il s'agit cesseraient de varier numériquement et conserveraient une valeur *quelconque* toujours constante. Le problème est-il convenablement résolu dans cette hypothèse, et veut-on restituer aux quantités, supposées quelconques mais constantes, leur caractère de variabilité continue, il suffit de substituer aux différences ordinaires les différentielles qui leur correspondent. Cela fait, et *par cela seul*, l'on obtient la solution cherchée pour le cas général. On voit ainsi d'où vient la puissance de l'analyse différentielle. Elle résulte essentiellement de ce que, dans certaine classe de problèmes, les équations aux différences ordinaires établies pour les cas les plus simples, ne sont pas plus tôt transformées en équations différentielles, qu'elles deviennent immédiatement applicables aux cas plus compliqués que l'on a principalement en vue et que l'on ne saurait aborder directement par tout autre méthode. Cette extension si remarquable des moyens bornés dont dispose l'analyse ordinaire, se distingue peut être moins encore par sa puissance, que par sa simplicité. Quelques exemples permettront d'apprécier l'une et l'autre. (1)

Soit une courbe engendrée par un point qui se meut dans l'espace. Une grandeur variable concourt à cette génération, et, pour chaque position du point générateur, elle dépend de la direction suivant laquelle s'effectue le déplacement initial. Supposons d'abord cette direction quelconque, mais constante; la ligne engendrée sera droite et si l'on désigne par α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes coordonnés, il viendra quels que soient ces angles

$$\Delta x = \cos \alpha . \Delta s.$$
$$\Delta y = \cos \beta . \Delta s.$$
$$\Delta z = \cos \gamma . \Delta s.$$

(1) Nous pourrions reproduire ici chacun des exemples traités dans la 1re série d'applications. Les déductions et les calculs seraient tout aussi simples. La marche seule paraitrait peut être un peu moins naturelle.

Suppose-t-on maintenant les angles continuement variables d'une position à une autre, il suffit de changer la caractéristique : il vient donc en ce cas

$$dx = \cos\alpha . ds$$
$$dy = \cos\beta . ds$$
$$dz = \cos\gamma . ds.$$

La courbe se trouve déterminée par les équations différentielles

$$dx = \frac{\cos\alpha}{\cos_\gamma} dz$$
$$dy = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} dz$$

on a d'ailleurs

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Soit un volume V engendré par le mouvement d'une aire plane qui se transporte parallèlement à elle-même, en changeant de grandeur. Imaginons que l'aire ω soit constante et prenons l'axe des z normal à son plan. Nous aurons donc cette hypothèse

$$\Delta V = \omega \Delta z.$$

De là résulte pour le cas où l'aire ω varie continuement

$$dV = \omega dz.$$

Soit encore un mobile animé d'une vitesse u continuement variable avec le temps t. Supposons d'abord cette vitesse quelconque, mais constante. Si nous désignons par e l'espace parcouru, nous aurons en ce cas

$$\Delta e = u \Delta t.$$

Or cette équation subsiste quelle que soit la vitesse pourvu qu'elle demeure constante. La vitesse ne peut donc être continuement variable sans qu'il n'en résulte immédiatement

$$de = udt.$$

On trouverait de même

$$mdu = Fdt.$$

m étant la masse du mobile et F l'action tangentielle sollicitante.

Soit enfin P le poids d'un corps de densité variable : m étant un point choisi comme on voudra dans l'intérieur du corps et $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

les côtés d'un parallélépipède rectangle aboutissant à ce point, nous désignerons en général par $\Delta\omega$ le poids de chacun des solides que nous aurons à considérer successivement.

Si nous supposons d'abord que la valeur, affectée au point m par la densité ρ, demeure invariable à partir de ce point, nous aurons pour le parallélépipède

$$\Delta\omega = \rho\Delta x \,\Delta y\, \Delta z$$

De là résulte pour le cas où la densité supposée constante dans chaque section parallèle au plan des xy est néanmoins continuement variable le long de l'ordonnée quelconque z.

$$d\omega = \rho\Delta x\, \Delta y\, dz.$$

et par conséquent

$$\Delta\omega = \Delta x\, \Delta y \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho\, dz.$$

Suppose-t-on maintenant que l'intégrale $\int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho dz$ varie avec y dans l'intervalle Δy, l'on a immédiatement

$$d\omega = \Delta x\, dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho dz.$$

En ce cas $\Delta\omega$ devient le poids d'un cylindre ayant pour hauteur Δx, pour base la section faite par le point m perpendiculairement à l'axe des x, pour densité celle qui répond à chaque point du corps dans la section dont il s'agit, cette densité étant d'ailleurs supposée constante dans le sens des x et constamment variable dans celui des z et des y. On a ainsi

$$\Delta\omega = \Delta x \int_{\Phi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho dz.$$

La double intégrale est elle à son tour supposée continuement variable avec x dans l'intervalle Δx, il vient

$$d\omega = dx \int_{\Phi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho dz\ ;$$

et l'on trouve pour le poids cherché

$$P=\int_a^A dx\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy\int_{f(x,y)}^{F(x,y)} dz.$$

S'il s'agissait du moment de ce poids par rapport au plan des xy, il suffirait de remplacer ρ par ρz dans l'expression précédente.

Nous ne multiplierons pas d'avantage les applications. Celles qui précèdent suffisent et la lumière qui jaillit de ce simple apercu nous paraît devoir frapper tout esprit attentif.

En résumé, lorsqu'on veut dans les méthodes ordinaires, exprimer une génération quelconque à l'aide de l'équation différentielle

$$dy=\omega dx \qquad (1)$$

l'on part de la propriété qui subsiste en vertu de l'équation fondamentale

$$\Delta y=\omega\Delta x \qquad (2)$$

dans laquelle ω est par hypothèse une quantité constante. Puis supposant cette grandeur variable, on a recours à des moyens plus ou moins simples, plus ou moins rigoureux, pour démontrer l'existence de l'équation différentielle. A notre point de vue toute démonstration particulière est surabondante. Il n'y a point d'intermédiaire entre l'équation aux différences (2) et l'équation différentielle (1) qui la généralise. Toutes deux subsistent nécessairement ensemble, et passer de l'une à l'autre, c'est changer la forme de l'expression, mais non pas le sens exprimé. Ce parallèle établit en faveur de notre méthode un avantage marqué. Il ne paraît pas d'ailleurs qu'on puisse arriver au but par une voie plus facile et plus directe. En effet *tout se réduit à saisir dans l'équation différentielle sa véritable signification.*

Dans la méthode des limites, les deux termes du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ s'annulant, ce sont les accroissements eux-mêmes qui s'anéantissent et non pas seulement un facteur compris dans leur expression analytique. Il semble donc que le symbole de l'indétermination ne doit pas disparaître. Cependant, parmi les valeurs en nombre infini que comporte en général toute grandeur indéterminée, il en est une ici qui se distingue et s'isole, parce qu'elle exprime la limite vers laquelle le rapport converge, alors que ses deux termes tendent à la fois vers zéro. C'est cette valeur que l'on considère. Elle n'appar-

tient pas à la suite des valeurs que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut prendre *effectivement*, mais elle s'y rattache par voie de continuité, et cela suffit pour fonder la méthode. Partant, si l'on veut, de la même donnée, nous ajoutons :

Pris à leur origine, les accroissements Δy, Δx s'engendrent l'un par l'autre suivant une loi déterminée. Cette loi peut être constante ou bien continuement variable. Est-elle constante, il en est de même du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Varie-t-elle au contraire, le rapport se complique des effets produits par cette variation continue.

En général, si l'on resserre indéfiniment l'intervalle Δx et que l'on considère les termes du rapport qui proviennent des modifications que la loi de génération subit dans cet intervalle, il est clair que leur expression numérique doit diminuer de plus en plus et tendre vers zéro. Quant au rapport lui-même, il converge vers une certaine limite. Cette limite exprime la valeur que le rapport tend à prendre à l'origine des accroissements, c'est-à-dire la valeur qu'il prendrait effectivement, et qu'il conserverait pour un intervalle quelconque, si la loi de génération se trouvait soustraite à tout changement et qu'elle se développat en restant permanente.

L'on voit ainsi pourquoi subsiste le fait fondamental de la méthode des limites, quelle est sa signification, et comment les limites elles-mêmes déterminent pour chaque valeur particulière affectée par la variable le rapport constant des accroissements différentiels.

Dans la méthode des infiniment petits, l'on pose

$$dy=f'(x).dx.$$

et l'on regarde les différentielles comme n'étant autre chose que les différences effectives parvenues à un certain degré de ténuité. Mais tant qu'il s'agit de ces différences, on a exactement

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x=[f'(x)+f'(x+\theta\Delta x)-f'(x)]\Delta x= [f'(x)+\Delta_1 f'(x)]\Delta x.$$

Ce n'est donc qu'en faisant abstraction du terme $\Delta_1 f'(x)$ que l'on passe en réalité des différences aux différentielles.

En vain supposera-t-on l'intervalle Δx aussi petit qu'on voudra, la différence $\Delta_1 f'(x)$ ne peut être constamment nulle dans cet intervalle à moins qu'elle ne le soit en même temps pour un intervalle

quelconque. *C'est donc indépendamment de la considération des infiniment petits que la suppression dont il s'agit s'effectue.* Elle a lieu, parce que cessant d'envisager les accroissements effectifs, et prenant à leur place les accroissements différentiels, ce qu'on voit dans la dérivée $f'(x)$, ce n'est plus une fonction de x, mais une quantité *constante*, déterminée par la valeur particulière attribuée à la variable. Dès lors, la différence $\Delta_1 f'(x)$ s'annule rigoureusement, quelque soit l'intervalle Δx, et la différentielle dy répond au développement de la loi de génération supposée permanente.

Lorsqu'on supprime $\Delta_1 f'(x)$ dans le binome $f'(x)+\Delta_1 f'(x)$, l'on retranche de l'accroissement effectif Δy tout ce qui provient des changements subis par la dérivée $f'(x)$. Opérer ainsi, c'est évidemment dégager l'accroissement différentiel dy. Mais comment reconnaître avec certitude dans le développement de l'accroissement Δy la différence $\Delta_1 f'(x)$ qui doit en être soustraite? Telle est, en cas de doute, la question à résoudre, et c'est alors qu'intervient, comme auxiliaire, la considération des quantités prétendues infiniment petites. Si l'on compare entr'eux les termes du développement, l'on remarque qu'ils se partagent en deux groupes essentiellement distincts. Les uns répondent à la dérivée $f'(x)$, les autres à la différence $\Delta_1 f'(x)$, et ceux-ci sont tels qu'ils décroissent indéfiniment *par rapport* aux premiers à mesure que Δx converge vers zéro. La propriété que nous venons de signaler est tout-à-fait caractéristique. Elle offre un moyen sûr de distinguer chaque groupe, et par conséquent de dégager l'accroissement différentiel *par la suppression* des termes reconnus parties constitutives de la différence $\Delta_1 f'(x)$. Il est permis sans doute de recourir à un artifice de calcul pour saisir dans l'équation aux différences ordinaires, l'expression de la loi de génération. Toutefois, il faut se garder d'attribuer un sens inexact aux opérations que l'on exécute, et de confondre, comme on le fait dans la méthode des infiniment petits, le moyen qu'on employe avec le résultat qu'on cherche à obtenir.

D'après cette explication générale, l'on voit que les procédés suivis dans la méthode des limites et dans celle des infiniment petits ont pour objet réel et définitif la détermination de la loi qui régit les accroissements différentiels, ces accroissements et cette loi acquerrant le sens que leur donne notre définition. Nous pourrions donc laisser à chacun le soin de choisir entre ces procédés et d'ajouter aux ressources qu'ils offrent, celles que notre point de vue présente, soit pour la facilité des calculs, soit pour la rigueur

des déductions. Mais toute idée nouvelle, introduite dans un système déjà connu, exige une certaine élaboration, et ce n'est pas sans effort que l'esprit parvient à s'en emparer de manière à la rendre aisément applicable. Cette considération ne nous a point échappé. Elle appelait de notre part une intervention plus directe. Puissions nous réaliser l'œuvre que nous avons entreprise et reconstruire avec l'élément que nous apportons, la base des mathématiques transcendantes.

ÉLÉMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

RÉSUMÉS AU POINT DE VUE DE LA LOI DE GÉNÉRATION.

Exposé synthétique des principes fondamentaux.

1) Étant donné la fonction *continue* $y=f(x)$, l'on en déduit

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

et l'on reconnaît aisément que, pour toute valeur particulière attribuée à x, Δy est fonction continue de Δx.

La dépendance mutuelle existant entre les accroissements $\Delta y, \Delta x$ subsiste, sans être interrompue, jusqu'à l'origine même de ces accroissements. C'est donc, *l'un par l'autre*, qu'ils s'engendrent *à partir de zéro*. Considérons cette génération simultanée, *alors qu'elle commence* et observons qu'elle est nécessairement régie par une loi déterminée.

La loi, *dont il s'agit*, est dite *loi de génération*. En général elle n'est pas constante, quel que soit x, et son expression numérique varie continuement (1). L'accroissement Δy peut donc être regardé comme dépendant à la fois,

1° *De la loi de génération* supposée permanente *à partir de la valeur particulière attribuée à la variable.*

2° *Des modifications continues* que cette loi subit dans l'intervalle Δx.

Concevons que la loi de génération se développe, en conservant la détermination qu'elle affecte à l'origine des accroissements que l'on considère. Pris dans cette hypothèse, l'accroissement de la grandeur y ne dépend plus des modifications que la loi de génération subit en réalité et, pour un même intervalle quelconque Δx, il diffère en général de l'accroissement effectif, exprimé par Δy. L'on nomme *différentielles* les accroissements qui répondent au développement continu de la loi de génération, *supposée perma-*

(1) Pour plus de développements voir l'exposé général page 228 et suivantes.

nente à partir de la valeur particulière attribuée à la variable, et pour les distinguer des *différences ordinaires* on leur applique une notation spéciale consistant dans la substitution de la caractéristique d à la caractéristique Δ.

2) Ces conventions admises, cherchons quelle est généralement la forme de la loi de génération.

Cette loi est constante, ou bien elle est continuement variable. Supposons d'abord qu'elle soit constante, indépendamment de toute valeur attribuée à x. En ce cas l'on a évidemment comme conséquence des premières définitions

$$\Delta y = dy$$

et puisque, par hypothèse, dy est indépendant de x, il en est de même de Δy.

La différence Δy ne dépendant que de Δx, considérons une suite quelconque d'intervalles respectivement égaux à Δx. A chacun de ces intervalles répond une même différence Δy. Si donc les intervalles sont au nombre de n, et tels que l'on ait toujours $n\Delta x = a$, la différence totale $f(x+a)-f(x)=b$, a pour expression $n\Delta y$, et il vient, quel que soit n, c'est-à-dire quel que soit Δx

$$\frac{n\Delta y}{n\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b}{a} = \text{Cons}^{\text{te}} = c$$

Il suit de là que *la loi de génération ne peut être constante dans la fonction y, sans que l'on ait en même temps,*

$$dy = \Delta y = c\Delta x.$$

Or $\Delta y = y - y'$, $\Delta x = x - x'$ il vient donc en substituant

$$y - y' = c(x - x')$$

ou désignant par c' la constante $y' - cx'$

$$y = cx + c'$$

Réciproquement si la fonction est linéaire, c'est-à-dire de la forme $y = cx + c'$, la loi de génération est constante et a pour expression

$$dy = \Delta y = c\Delta x$$

Il est clair en effet que la relation $\Delta y = c\Delta x$ subsiste à l'origine même de tout accroissement.

3) Supposons maintenant la loi de génération continuement variable et observons que, pour chaque valeur attribuée à x, elle prend

une détermination particulière. Soit $x=x'$: la loi de génération, supposée permanente à partir de $x=x'$, a pour expression

$$dy=\phi(x',\Delta x)$$

Considérée en elle même, la différentielle dy n'est qu'une différence ordinaire, prise dans l'hypothèse d'une loi de génération constante. Le résultat obtenu tout à l'heure s'applique à cette différence. On a donc

$$dy=\phi(x',\Delta x)=c\Delta x.$$

Remarquons ici que c ne peut être une constante absolue, puisque par hypothèse la loi de génération varie dans la fonction y. Toutefois il reste démontré que la quantité c est indépendante de Δx. Sa valeur dépend donc essentiellement de la valeur x' attribuée à la variable, et comme ces deux valeurs sont nécessairement déterminées ensemble, il en résulte que c est une fonction de x. Cette fonction prend par rapport à la fonction primitive le nom de fonction dérivée. En la désignant ainsi et en la représentant par le signe de la fonction affecté d'un indice, on la distingue et en même temps l'on rappelle son origine.

Comme conséquence de ces déductions, il vient

$$c=f'(x)$$

et il est établi que la loi de génération se présente en général sous la forme

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

4) Pour compléter ces notions fondamentales il nous reste à montrer comment la fonction dérivée peut être déduite de la fonction primitive. Soit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Si l'on remplace Δx par $\Delta x+i$, et que l'on retranche la première valeur de la seconde, on a pour différence

$$\frac{f(x+\Delta x+i)-f(x)}{\Delta x+i}-\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x+i)-f(x+\Delta x)}{\Delta x+i}$$
$$-\frac{i}{\Delta x+i}\,\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Or, quel que soit Δx, l'on peut toujours prendre la quantité i assez petite pour que cette différence soit moindre que toute gran-

deur donnée ; la continuité du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ subsiste donc jusqu'à l'origine même des accroissements.

De là et de ce qui précède dérivent les principes suivants :

1°. Lorsque la loi de génération se développe en demeurant constante, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est constant, indépendamment de toute valeur attribuée à Δx. Varie-t-elle au contraire, le rapport devient continuement variable.

2°. Si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ varie dans l'intervalle Δx, c'est par suite des modifications que la loi de génération subit dans cet intervalle. Il y a continuité dans les changements successifs qui résultent de ces modifications.

3°. S'agit-il d'abord de la loi de génération, considérée indépendamment des variations qu'elle éprouve et supposée permanente à partir de l'origine des accroissements; la partie du rapport qui répond à cette hypothèse demeure invariable, quel que soit Δx. S'agit-il ensuite des modifications que cette loi subit dans l'intervalle Δx, la partie du rapport qui dépend de ces modifications varie continuement avec Δx, et elle peut être rendue moindre que toute grandeur donnée, en prenant Δx suffisamment petit.

Cela posé, concevons que Δx converge vers zéro. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ converge en même temps vers une certaine valeur déterminée, et il en approche indéfiniment, sans toutefois pouvoir jamais l'atteindre. Cette valeur est celle que le rapport prendrait *effectivement* et qui subsisterait *constante* pour un intervalle quelconque, si la loi de génération se trouvait soustraite aux modifications qu'elle subit, et qu'elle se développât en restant permanente à partir de l'origine des accroissements. Mais, *dans cette hypothèse*, la différentielle se substitue à la différence et la valeur dont il s'agit a pour expression

$$\frac{dy}{\Delta x} = f'(x).$$

On voit donc que, sauf le cas des fonctions linéaires, l'on a toujours et nécessairement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \gamma$$

η dépendant de Δx et décroissant indéfiniment à mesure que Δx converge vers zéro.

En résumé la fonction y, *supposée continue*, est ou non linéaire.

Dans le premier cas, il vient

$$\eta=0. \qquad f'(x)=\text{Cons}^{\text{te}}=c. \qquad dy=\Delta y=c\Delta x.$$

Dans le second, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se compose essentiellement de deux parties distinctes, l'une indépendante de Δx et c'est la dérivée $f'(x)$, l'autre dépendante de cet accroissement et celle-ci converge vers zéro en même temps que Δx. La décomposition du rapport en ces deux parties étant supposée faite, l'on en déduit immédiatement l'expression générale de la loi de génération,

$$dy=f'(x)\Delta x$$

Le procédé de décomposition analytique que nous venons d'indiquer n'est pas le seul auquel on puisse recourir pour la recherche de la fonction dérivée. Quelquefois la loi de génération peut être immédiatement saisie, et alors il suffit de la considérer dans son développement continu, pour obtenir, directement et sans calcul intermédiaire, l'équation différentielle qui lui sert d'expression.

5) On démontre aisément que la fonction dérivée $f'(x)$ détermine implicitement l'accroissement effectif Δy. On peut d'ailleurs le reconnaître à priori. En effet, de quoi dépend la différence Δy, sinon de l'expression particulière que la loi de génération prend à l'origine des accroissements que l'on considère et en outre des modifications successives qu'elle subit dans l'intervalle Δx. Or c'est précisément l'équation différentielle qui fixe chacune des déterminations que la loi de génération affecte successivement dans un intervalle quelconque. On voit donc que les deux relations $dy=f'(x)\Delta x$, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, peuvent et doivent se suppléer mutuellement.

Règles générales de la différenciation.

6) Soit en premier lieu

$$y=f(x)$$

et en même temps

$$x=\mathrm{F}(v)$$

Les lois qui régissent la génération de Δy par Δx et de Δx par Δv

sont respectivement

$$dy = f'(x)\Delta x$$
$$dx = F'(v)\Delta v.$$

S'agit-il maintenant de la loi à laquelle obéissent les grandeurs Δy et Δv lorsqu'elles s'engendrent l'une par l'autre à partir de zéro, l'on a

$$\Delta y = (f'(x) + \eta)\Delta x$$
$$\Delta x = (F'(v) + \eta')\Delta v$$

et par suite

$$\Delta y = [f'(x) + \eta][F'(v) + \eta']\Delta v$$

Or les quantités η et η' sont toutes deux indéfiniment décroissantes à mesure que Δx converge vers zéro, il vient donc

$$dy = f'(x) \cdot F'(v) \cdot \Delta v = f'(x) \cdot dx.$$

Dans cet exemple y est en même temps fonction de x et fonction de fonction de v. A la différence Δy répondent deux lois de génération. L'une de ces lois est relative à l'accroissement Δx, l'autre à l'accroissement Δv. Pour passer de la première à la seconde il suffit, comme on vient de le voir, de remplacer Δx par dx. Delà résulte une règle générale qu'il convenait d'éclaircir mais qu'il était d'ailleurs facile d'établir à priori. En effet, lorsque l'on considère isolément chacune des équations différentielles

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (1)$$
$$dx = F'(v)\Delta v \qquad (2)$$

l'on voit que Δx et dx sont tout-à-fait arbitraires, on peut donc adopter pour Δx dans la première de ces équations la valeur que dx prend dans la seconde, et écrire en conséquence

$$dy = f'(x)dx. \qquad (3)$$

Sous cette forme l'équation (3) conserve le sens de l'équation (1) et en outre elle est susceptible de se combiner directement avec l'équation (2), de manière à acquérir un sens nouveau.

On aurait de même en supposant v fonction d'une quatrième variable

$$dx = F'(v)dv \qquad (4)$$

et ainsi de suite les équations (3), (4), etc. subsistant toutes ensemble.

7) Lorsqu'il existe entre n variables $(n-1)$ relations, chaque

variable peut être considérée comme fonction de l'une quelconque des autres. Dans chacun des couples qu'on peut ainsi former, la variable, prise pour fonction, a une différentielle particulière. Si ces différentielles sont toutes prises par rapport à une seule et même variable, celle-ci est dite variable indépendante et chaque différentielle se trouve déterminée.

Le choix de la variable indépendante est tout-à-fait arbitraire. Néanmoins et pour plus de généralité, il convient habituellement d'introduire, par la pensée, une variable que l'on n'exprime point et de la prendre pour variable indépendante, en la supposant liée, par telle relation qu'on voudra, à l'une quelconque des variables sur lesquelles on opère explicitement. Dans ce système, les calculs offrent plus de symétrie, et ils se prêtent en outre à toute détermination ultérieure de la variable indépendante. Veut-on, par exemple, que v, l'une des variables considérées comme fontions de la variable u non exprimée devienne variable indépendante. Pouvant disposer de la fonction arbitraire $v=\Phi(u)$, on imaginera qu'elle est de la forme

$$v=u$$

ou plus généralement

$$v=cu+c'$$

et comme il en résulte

$$\Delta v=dv$$

il suffira de substituer à la différentielle dv, la différence Δv qui lui est égale.

Dorénavant nous supposerons toujours que la variable indépendante reste inexprimée et nous écrirons en conséquence,

$$dy=f'(x)dx.$$

Quant aux fonctions dérivées nous les représenterons indifféremment, soit par le signe de la fonction primitive affecté d'indices convenables, soit par le *symbole* d'une expression fractionnaire ayant pour numérateur la différentielle de la fraction et pour dénominateur la différence de la variable que l'on a en vue dans la détermination de la dérivée.

8) Soit en second lieu

$$y=\mathrm{F}(v,u)$$

v et u étant par hypothèse deux fonctions de x, il en résulte

implicitement

$$y=f(x)$$

et ce que nous nous proposons de déterminer c'est la dérivée $f'(x)=\frac{dy}{\Delta x}$.

On a d'abord

$$\Delta y=F(v+\Delta v,u+\Delta u)-F(v+\Delta v,u)+F(v+\Delta v,u)-F(v,u).$$

c'est-à-dire

$$\Delta y=\Delta u[F'_u(v+\Delta v,u)+\eta]+\Delta v[F'_v(v,u)+\eta']$$

d'un autre côté

$$F'_u(v+\Delta v,u)=F'_u(v,u)+k.\Delta v$$

donc déjà

$$\Delta y=\left[\frac{\Delta y}{\Delta u}+\eta+k\Delta v\right]\Delta u+\left[\frac{dy}{\Delta v}+\eta'\right]\Delta v$$

mais d'autre part

$$\Delta u=\left(\frac{du}{\Delta x}+\eta''\right)\Delta x$$

$$\Delta v=\left(\frac{dv}{\Delta x}+\eta'''\right)\Delta x$$

il vient donc en substituant

$$\Delta y=\Delta x\left[\frac{dy}{\Delta u}\cdot\frac{du}{\Delta x}+\frac{dy}{\Delta v}\cdot\frac{dv}{\Delta x}+\xi\right]$$

ξ représentant un ensemble de termes qui dépendent de Δx et convergent vers zéro en même temps que cet accroissement. Delà résulte

$$dy=\frac{dy}{\Delta u}\cdot\frac{du}{\Delta x}\cdot\Delta x+\frac{dy}{\Delta v}\cdot\frac{dv}{\Delta x}\cdot\Delta x$$

ou enfin et plus simplement

$$dy=\frac{dy}{\Delta u}\cdot du+\frac{dy}{\Delta v}\cdot dv.$$

La différentielle dy prend ici le nom de *différentielle totale*. On donne d'ailleurs celui de *différentielle partielle* à chacune des expressions $\frac{dy}{\Delta u}du$, $\frac{dy}{\Delta v}\cdot dv$. Si l'on différencie la fonction $F(v,u)$,

en supposant v constant l'on a pour résultat,

$$\frac{dy}{\Delta u} \cdot du$$

si c'est au contraire u qui cesse d'être regardé comme variable, il vient

$$\frac{dy}{\Delta v} dv.$$

La différentielle totale *s'obtient donc en faisant la somme* des différentielles partielles *correspondantes à chacune de ces deux hypothèses.*

Si l'on avait

$$y = \phi(t,u,v)$$

on trouverait de même

$$dy = \frac{dy}{\Delta t} dt + \frac{dy}{\Delta u} du + \frac{dy}{\Delta v} dv.$$

et ainsi de suite, quel que soit le nombre des variables.

9) La règle générale que nous venons d'établir conduit pour les cas les plus simples à des règles particulières dont nous nous bornerons à présenter le résultat. Ainsi désignant par a (1) une constante et par y, v, u des variables

$y = a \pm v$	donne	$dy = \pm dv$
$y = av$	—	$dy = adv$
$y = u \pm v$	—	$dy = du \pm dv$
$y = uv$	—	$dy = udv + vdu.$

Différenciation des fonctions élémentaires et des fonctions composées.

10) La différenciation des fonctions composées, quelles qu'elles soient, peut toujours se ramener à la différenciation des fonctions élémentaires. Il convient donc de s'occuper d'abord de celles-ci.

Les fonctions élémentaires sont les suivantes :

1° La fonction algébrique x^m, m étant une constante quelconque.

2° La fonction Log x et l'exponentielle a^x qui lui correspond,

---

(1) Pour $y = a$, $\Delta y = \text{Const}^{\text{te}} = 0$, donc $dy = \Delta y = 0$.

a étant un nombre quelconque positif et représentant la base du système que l'on considère.

8° Les fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$.

11) Soit la fonction algébrique

$$y=x^m$$

il vient

$$y=(x+\Delta x)^m-x^m=x^m\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m-1\right]$$

Or Δy est nécessairement de la forme $\Delta x[f'(x)+\eta]$. Telle est donc aussi la forme du facteur $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m-1$; mais, dans ce facteur, Δx est *inséparable* du dénominateur x et *réciproquement*. On a donc

$$\left[1+\frac{\Delta x}{x}\right]^m-1=\frac{\Delta x}{x}\,(M+\eta).$$

M étant une constante particulière, fonction de m, et η une quantité indéfiniment décroissante avec Δx.

Substituant l'on trouve

$$\Delta y=[M+\eta]x^{m-1}\Delta x=(\phi(m)+\eta)x^{m-1}\Delta x.$$

et l'on en déduit

$$dy=\phi(m).x^{m-1}dx \qquad (1)$$

La forme de la fonction ϕ restant à déterminer nous poserons

$$a+b=m \qquad (2)$$

puis, appliquant la formule (1) et le procédé du N° 9 à la différenciation du produit $x^a\cdot x^b=x^m$,

$$dy=[\phi(a)+\phi(b)]x^{m-1}dx \qquad (3)$$

Les différentielles (1) et (3) sont nécessairement identiques. Il vient donc

$$\phi(a)+\phi(b)=\phi(m) \qquad (4)$$

et cette équation de condition subsiste quels que soient a et b.

Considérons m comme constant, et différencions les équations (2) et (4), nous aurons

$$da+db=0$$

$$\phi'(a)da+\phi'(b)db=0$$

et par suite

$$\phi'(a)=\phi'(b)$$

ou posant $b=0$

$$\phi'(m)=\phi'(0)=\text{cons}^{\text{te}}.$$

Delà résulte, conformément au principe établi N° (2)

$$\phi(m)=cm+c'$$

Or si l'on pose $m=1$ dans l'équation différentielle (1), et $b=0$ dans l'équation de condition (4), l'on en déduit immédiatement

$$\phi(1)=1$$
$$\phi(0)=0.$$

On a donc $c=1$, $c'=0$ et il vient simplement

$$\phi(m)=m.$$

En résumé, m étant quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, rationnel ou irrationnel, l'on a constamment

$$dx^m=mx^{m-1}.dx.$$

12) Soit la fonction $y=\text{Log}.\,x$ et la fonction $y=a^x$, a étant la base du système dans lequel Log. x est écrit.

Considérant d'abord la première de ces fonctions, l'on a

$$\Delta y=\text{Log}.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

et l'on en conclut comme au numéro précédent

$$\Delta y=\frac{\Delta x}{x}(c+\eta)$$

c étant une fonction de a. Delà résulte,

$$dy=c\cdot\frac{dx}{x}.$$

La constante c dépendant de la base du système dans lequel on suppose écrit Log. x, imaginons cette base choisie de manière à ce que l'on ait $c=1$. En ce cas la base est représentée par le nombre e, et les logarithmes sont dits logarithmes Népériens. Adoptant pour ces logarithmes la caractéristique log. il vient

$$dy=d.\log.\,x=\frac{dx}{x}$$

et comme on a généralement

$$\text{Log}.\,x = \frac{\log.\,x}{\log.\,a} = \log.\,x.\,\text{Log}.\,e$$

l'on en déduit

$$d\,\text{Log}.\,x = \frac{dx}{x}\cdot\text{Log}.\,e.$$

Soit maintenant la fonction

$$y = a^x$$

il vient

$$x = \text{Log}.\,y$$

et d'après ce qui précède

$$dx = \frac{dy}{y}\ \text{Log}.\,e$$

d'où remplaçant y par a^x et Log.e par $\frac{1}{\log.\,a}$,

$$da^x = a^x.\,\log.\,a.dx.$$

Nous verrons plus loin comment on détermine la valeur de la quantité e, base du système des logarithmes Népériens.

13) Soit en dernier lieu les fonctions circulaires $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Soit AB un arc quelconque représenté par x et BC son sinus (fig. (1)). Prise à son origine, la génération simultanée des différences Δx, $\Delta \sin x$, $\Delta \cos x$. dépend de la loi qui régit le déplacement initial du point B sur la circonférence. Supposer cette loi permanente, c'est évidemment substituer à l'arc BM la tangente BE, et aux accroissements effectifs Δx, $\Delta \sin x$, $\Delta \cos x$, les accroissements différentiels, dx, $d \sin x$, $d \cos x$. Or, si d'un point quelconque E pris sur la tangente, on abaisse une perpendiculaire sur le rayon OA, et que par le point B l'on mène BF parallèle à ce rayon, l'on a dans le triangle rectangle BEF

$$\text{EF} = \text{BE} \cos x.$$

Mais BE $= dx$, EF $= d \sin x$, il vient donc en substituant,

$$d \sin x = \cos x.dx.$$

On trouverait de même

$$\text{BF} = \text{BE}.\sin x$$

et à raison de $BF=-d\cos x$.

$$d\cos x=-\sin x\cdot dx.$$

S'agit-il de la fonction circulaire *inverse*

$$y=\operatorname{arc}\sin x$$

De là résulte

$$x=\sin y$$

et par conséquent

$$dx=\cos y\cdot dy$$

il vient donc en substituant

$$dy=d\operatorname{arc}\sin x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

on a de même

$$d\operatorname{arc}\cos x=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

on remarquera que pour $x=0$

$$d\sin x=dx$$
$$d\cos x=0$$
$$d\operatorname{arc}\sin x=dx$$
$$d\operatorname{arc}\cos x=-dx.$$

14) Si nous passons maintenant des fonctions élémentaires aux fonctions composées, il nous sera facile de différencier celles-ci à l'aide des résultats précédents, combinés avec les règles que nous avons établies aux n°s 6 et 8.

Quelques exemples suffiront pour indiquer la marche à suivre en général.

Soit d'abord

$$y=(\log.\sin x^m)^\rho$$

l'on a

$$dy=\rho(\log.\sin x^m)^{\rho-1}d.\log.\sin x^m=\rho(\log.\sin x^m)^{\rho-1}\frac{d.\sin x^m}{\sin x^m}$$

$$=\rho(\log.\sin x^m)^{\rho-1}\frac{\cos x^m}{\sin x^m}dx^m.=m\rho(\log.\sin x^m)^{\rho-1}\cot.x^m.x^{m-1}.dx.$$

Soit encore

$$y=x^z\log.\sin x$$

z étant une fonction de x. Il vient

$$dy = \log.\sin x[zx^{z-1}dx + x^z \log.x.dz] + x^z \cot.x.dx.$$

Différentielles des ordres supérieurs.

15) Reprenons l'équation différentielle

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (1)$$

Dans laquelle x est par hypothèse variable indépendante. Rappelons nous d'ailleurs que l'accroissement Δx est entièrement arbitraire et susceptible d'une détermination quelconque, positive ou négative.

Lorsque dans l'équation (1) l'on attribue à x une valeur particulière, cette équation fournit l'expression correspondante de la loi de génération, et c'est ainsi que l'on peut obtenir successivement toutes les déterminations que cette loi comporte. Dans chacune de ces déterminations, les accroissements dy, Δx restent toujours variables, tandis que la dérivée $f'(x)$ n'y figure jamais que comme quantité constante.

Admeton au contraire que la variable engagée sous le signe de la fonction reste indéterminée, il est visible qu'une pareille hypothèse ne peut avoir pour objet que la comparaison des expressions diverses, successivement affectées par la loi de génération. En ce cas l'on est naturellement conduit à prendre, pour terme commun de comparaison, l'effet qui résulte du développement continu de cette loi, lorsqu'on la suppose permanente dans un certain intervalle. Or, cet effet, exprimé par dy, dépend à la fois de $f'(x)$ et de Δx. On voit donc que, pour donner à la comparaison dont il s'agit un sens précis et une signification réelle, il faut nécessairement attribuer à l'intervalle Δx une valeur quelconque, toujours constante.

Cela posé, Δx étant quelconque mais constant, l'accroissement dy ne dépend plus que de x, et il constitue une nouvelle fonction qui peut être différenciée, comme l'a été la première. On a alors en désignant par $\Delta_1 x$ la valeur attribuée à Δx

$$dy = f'(x)\Delta_1 x$$

et l'on en déduit par la différenciation

$$d.dy = f''(x)\Delta_1 x.\Delta x.$$

Observons que la loi ainsi exprimée est celle qui régit la génération de la différence $\Delta . dy$. Elle est susceptible, comme on le voit, d'autant de déterminations particulières que la dérivée seconde $f''(x)$ comporte de valeurs distinctes. On peut donc appliquer à cette génération les considérations développées ci-dessus, et si l'on se propose d'étudier la loi nouvelle dans ses diverses expressions, il faudra, comme tout-à-l'heure, attribuer à la différence Δx une seule et même valeur quelconque, toujours constante. Dès lors on est conduit à différencier de nouveau et l'on trouve

$$d \cdot d \cdot dy = f'''(x) \Delta_1 x . \Delta_2 x . \Delta x.$$

Les mêmes raisonnements, toujours répétés, permettraient de poursuivre indéfiniment ces différenciations successives.

Les accroissements $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x$, $\Delta_3 x$, etc., restant arbitraires, bien qu'ils soient supposés constants, il nous est permis pour plus de simplicité de les prendre tous égaux à Δx. En ce cas, si nous rappelons par un indice le nombre de différenciations effectuées, nous aurons en général pour expression de la loi qui régit la génération de la différence $\Delta . d^{n-1} y$

$$d \cdot d^{n-1} y = d^n y = f^n(x) \Delta x^n$$

ou ce qui revient au même

$$df^{n-1}(x) = d \cdot \frac{d^{n-1} y}{\Delta x^{n-1}} = f^n(x) \Delta x.$$

16) Les notions qui précèdent peuvent suffire en ce qui concerne la définition des différentielles des ordres supérieurs. Cependant elles ne donnent point une idée précise de ce que sont ces différentielles par rapport aux différences du même ordre qui leur correspondent, et, ne fut-ce que par ce motif, il ne sera pas sans utilité d'établir directement, pour une différentielle d'un ordre quelconque, l'interprétation dont elle est immédiatement susceptible.

A cet effet nous remarquerons d'abord que si l'on désigne par α une fonction particulière de x et Δx, supposée telle que, quelque soit x, cette fonction décroisse indéfiniment, à mesure que Δx converge vers zéro, il en résulte nécessairement

$$\Delta \alpha = \Delta x . \left[\frac{d\alpha}{\Delta x} + \eta \right]$$

le binome $\dfrac{d\alpha}{\Delta x} + \eta$ constituant en général une fonction de même

nature que la fonction α, c'est-à-dire, indéfiniment décroissante à mesure que Δx converge vers zéro.

Pour démontrer cette proposition, considérons Δx comme constant et remplaçons x par $x+\Delta_1 x$; α deviendra α_1 et nous aurons

$$\alpha_1-\alpha=\Delta_1 x\left[\frac{d\alpha}{\Delta_1 x}+\eta\right]$$

$\frac{d\alpha}{\Delta_1 x}$ étant indépendant de $\Delta_1 x$, et η indéfiniment décroissant à mesure que $\Delta_1 x$ est supposé de plus en plus petit. Or, quelque soit x,α décroit indéfiniment avec Δx. Donc quelque soit $\Delta_1 x$, le binome $\frac{d\alpha}{\Delta_1 x}+\eta$ est indéfiniment décroissant avec Δx. Mais $\frac{d\alpha}{\Delta^1 x}$ ne dépend pas de $\Delta_1 x$, tandis que η, s'il n'est pas toujours nul, en dépend nécessairement. Le binome ne peut donc être indéfiniment décroissant avec Δx, qu'autant que chacun de ses deux termes jouit respectivement de cette propriété.

Cela posé, si l'on observe que η décroit sans cesse avec $\Delta_1 x$, tandis que $\frac{d\alpha}{\Delta_1 x}$ en est indépendant, il est manifeste que l'hypothèse $\Delta_1 x=\Delta x$ n'altère en rien la propriété que possèdent η et $\frac{d\alpha}{\Delta_1 x}$ de décroître indéfiniment à mesure que Δx converge vers zéro. De là résulte

$$\Delta\alpha=\Delta x\left[\frac{d\alpha}{\Delta x}+\eta\right]$$

le binome $\frac{d\alpha}{\Delta x}+\eta$ étant en général une fonction de même nature que la fonction α.

Soit maintenant

$$\Delta y=\Delta x[f'(x)+\alpha_1]$$

L'accroissement Δx étant quelconque, mais constant, l'on aura pour la différence du second ordre

$$\Delta^2 y=\Delta x^2\left[f''(x)+\xi+\frac{d\alpha_1}{\Delta x}+\eta_1\right]$$

ou plus simplement

$$\Delta^2 y=\Delta x^2[f''(x)+\alpha_2]$$

α_2 étant une fonction du genre de celles que nous avons désignées par α, α.

On trouverait de même pour la différence du 3me ordre

$$\Delta^3 y = \Delta x^3 [f'''(x) + \alpha_3]$$

et en général pour une différence quelconque de l'ordre n

$$\Delta^n y = \Delta x^n [f^n(x) + \alpha_n].$$

Le rapport $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ étant pris à son origine, on voit qu'il est indépendant de Δx, et qu'en général il varie continuement avec x. C'est donc, ***l'un par l'autre et suivant une loi déterminée***, que les grandeurs $\Delta^n y$ et Δx^n s'engendrent à partir de zéro. La loi, dont il s'agit, est nommée *loi de génération de l'ordre* n. Lorsqu'on la suppose permanente, à partir de la valeur attribuée à la variable, certains accroissements répondent à son développement et en général, *pour une même valeur quelconque de l'intervalle* Δx, ils diffèrent des accroissements effectifs exprimés par $\Delta^n y$. L'on conserve le nom de différentielles aux accroissements pris dans cette hypothèse, et pour les distinguer des différences du même ordre, qui leur correspondent, on substitue la caractéristique d à la caractéristique Δ. L'on a ainsi

$$d^n y = f^n(x) \Delta x^n$$

Cette loi ne peut d'ailleurs être permanente dans la fonction donnée sans que l'on ait en même temps.

$$d^n y = \Delta^n y, \qquad f^n(x) = \text{Cons}^{te}., \qquad \alpha_n = 0.$$

17) Les différentielles d'un ordre quelconque étant ainsi définies, l'on remarque que si l'on attribue à Δx une valeur quelconque, toujours constante, il vient immédiatement

$$d \cdot dy = f''(x) \Delta x^2$$
$$d \cdot d \cdot dy = f'''(x) \Delta x^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on a donc

$$d^2 y = d \cdot dy$$
$$d^3 y = d \cdot d \cdot dy$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et ainsi de suite à l'infini, le symbole $d^n y$ acquerrant une nouvelle signification et exprimant, si l'on veut, le résultat de n différenciations successives.

18. Les considérations qui nous ont guidé dans la détermination du sens à attacher au symbole d^ny montrent suffisamment que les différentielles des ordres supérieurs ne peuvent correspondre en général qu'à l'accroissement, supposé constant, de la variable indépendante. Lorsqu'on opère en même temps sur plusieurs fonctions d'une même variable, il est permis de prendre pour accroissement de cette variable une valeur quelconque, toujours constante; mais dès lors, à moins que les fonctions dont il s'agit ne soient linéaires, leurs accroissements différentiels dépendent à la fois de la variable et de son accroissement. Si donc cet accroissement est supposé constant, chaque différentielle devient fonction de la variable indépendante, et nulle ne peut être considérée comme constante, lorsque les autres varient continuement. Il suit de là que les différentielles des ordres supérieurs se rapportent nécessairement à la variable indépendante. Toutefois, s'il s'agissait d'une fonction qui fût liée à cette variable par une équation linéaire, la différentielle de cette fonction devenant constante en même temps que l'accroissement de la variable, il est clair qu'on pourrait substituer l'une à l'autre dans les différenciations successives.

Pour éclaircir ce point et fixer les idées, prenons l'équation différentielle

$$dy=f'(x)dx$$

et supposons d'abord que la variable indépendante ne soit pas exprimée. Si l'accroissement attribué à la variable indépendante est constant, quelqu'il soit d'ailleurs, les différentielles deviennent des fonctions de cette variable. On a donc en différenciant une seconde fois et opérant sur $f'(x).dx$ comme sur le produit de deux facteurs

$$d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x$$

on aurait de même (dy, d^2y, dx, d^2x, étant toujours fonction de la variable indépendante).

$$d^3y=f'''(x)dx^3+3f''(x)dx.d^2x.+f'(x)d^3x.$$

et ainsi de suite. Il est d'ailleurs évident que si l'on représente par

$$y=F(z)$$
$$x=\phi(z)$$

les relations qui font dépendre x et y de la variable indépendante

z, non exprimée jusqu'ici, l'on a conformément à ce qui précède

$$dy = F'(z)\Delta z \qquad dx = \Phi'(z)\Delta z$$
$$d^2y = F''(z)\Delta z^2 \qquad d^2x = \Phi''(z)\Delta z^2$$
$$d^3y = F'''(z)\Delta z^3 \qquad d^3x = \Phi'''(z)\Delta z^3$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Suppose-t-on maintenant que l'équation $x = \Phi(z)$ soit linéaire, c'est-à-dire de la forme

$$x = cz + c'$$

il vient

$$dx = c\Delta z = \Delta x$$

et généralement, pour tous les ordres supérieurs au premier

$$d^nx = 0.$$

En ce cas, à la différence constante $c\Delta z$ correspond la différentielle également constante $dx = \Delta x = c\Delta z =$. Il est donc indifférent de substituer l'une à l'autre et suivant que l'on considère la génération de la différence $\Delta^n y$ comme s'effectuant, à partir de zéro, soit par Δz^n, soit par Δx^n, l'on peut poser

$$d^ny = F^n(z)\Delta z^n = c^n f^n(x)\Delta z^n$$

ou

$$d^ny = f^n(x)\Delta x^n = F^n(z)\frac{\Delta x^n}{c^n}.$$

19) x étant variable indépendante et y fonction de x $(y = f(x))$ l'on a généralement

$$d^ny = f^n(x)\Delta x^n$$

et l'on en déduit

$$f^n(x) = \frac{d^ny}{\Delta x^n}.$$

la dérivée ayant pour valeur le rapport de la différentielle d^ny à la différence Δx^n. Il n'en serait pas de même si la variable x était dépendante. Néanmoins l'on peut encore conserver le symbole $\frac{d^ny}{\Delta x^n}$ pour expression de la dérivée $f^n(x)$. Seulement, il faut observer alors que, malgré son apparence fractionnaire, ce symbole cons-

titue un tout indivisible, le numérateur indiquant la fonction et l'ordre de la dérivée que l'on considère, le dénominateur la variable par rapport à laquelle la dérivation s'effectue.

La convention que nous venons d'établir est généralement adoptée, mais avec une modification consistant en ce que l'on substitue le signe d au signe Δ, et que l'on écrit en conséquence

$$f^{n}(x)=\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$$

Pour nous; les expressions de la forme $\frac{d^{n}y}{\Delta x^{n}}$ formeront toujours un tout indivisible. Quant à celles de la forme $\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$, pour éviter la confusion qui résulte de leur emploi, nous n'y verrons jamais qu'un quotient et c'est ainsi que nous poserons

$$f'(x)=\frac{dy}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

$\frac{dy}{\Delta x}$ étant un symbole et $\frac{dy}{dx}$ le rapport de deux différentielles.

Lorsque x est variable indépendante, l'on a $dx=\Delta x$ et il vient conformément à ce qui précède

$$f^{n}(x)=\frac{d^{n}y}{dx^{n}} \qquad (1)$$

La variable x est elle au contraire dépendante, l'équation (1) ne subsiste en général que pour le cas particulier où l'on pose $n=1$. Veut-on alors effectuer ce qu'on appelle le changement de la variable indépendante, c'est-à-dire déterminer quelles substitutions doivent être faites dans des formules où figurent les dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, etc., on remarquera que l'on a toujours x étant ou non variable dépendante

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

or, de là résulte

$$f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}=\frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dxd^{2}y-dyd^{2}x}{dx^{3}}.$$

on trouverait de même

$$f'''(x)=\frac{d.f''(x)}{dx}$$

et ainsi de suite.

Extension des règles précédentes aux fonctions implicites et aux fonctions de plusieurs variables indépendantes.

20) Soit z une fonction quelconque de deux variables x et y. L'on a pour expressions symboliques des dérivées successives,

1° Dans l'hypothèse de y constant $\frac{dz}{\Delta x}, \frac{d^2z}{\Delta x^2}$, etc.

2° Dans l'hypothèse de Δ constant $\frac{dz}{\Delta y}, \frac{d^2z}{\Delta y^2}$, etc.

Opère-t-on maintenant sur chacune de ces dérivées comme sur la fonction primitive, on est naturellement conduit à adopter pour expressions symboliques des opérations effectuées $\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}, \frac{d^2z}{\Delta y\Delta x}$, etc. le nombre des dérivations étant toujours marqués par l'indice supérieur et leur ordre successif, ainsi que les variables auxquelles elles se rapportent, par les signes inférieurs.

Ces conventions admises, il convient d'abord de rechercher si, toutes choses égales d'ailleurs, l'ordre, dans lequel les dérivations se font successivement, influe ou non sur le résultat définitif.

Posons à cet effet

$$z=\mathrm{F}(x,y)$$

et traitant y comme une constante, prenons la différence par rapport à x; nous aurons en ce cas

$$\mathrm{F}(x+\Delta x,y)-\mathrm{F}(x,y)=\Delta x\left[\frac{dz}{\Delta x}+\alpha\right]$$

α étant en général ou nul, ou indéfiniment décroissant avec Δx, quels que soient d'ailleurs x et y.

Remplaçons, dans α, y par $y+\Delta y$, il viendra

$$\Delta\alpha=\Delta y\left[\frac{d\alpha}{\Delta y}+\eta\right]$$

Or quelque soit Δy, $\Delta\alpha$ est, par hypothèse, indéfiniment décrois-

sant avec Δx, il en est donc de même du binome $\frac{d\alpha}{\Delta y}+\eta$. Il suit de là que si l'on prend la différence de la fonction $[F(x+\Delta x,y)-F(x,y)]$, par rapport à y et en considérant x comme constant, il vient

$$F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)=\Delta y.\Delta x.\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}$$

$$+6+\frac{d\alpha}{\Delta y}+\eta\Big]=\Delta y.\Delta x\Big[\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}+\theta\Big]$$

l'ensemble des termes représentés par θ, étant ou nul ou indéfiniment décroissant à mesure que les accroissements Δx, Δy, convergent *tous deux* vers zéro.

Observons ici que le premier membre de la dernière équation resterait évidemment le même, si, intervertissant l'ordre des opérations, l'on supposait la première différence prise par rapport à y, et la deuxième par rapport à x. Mais en ce cas, le second membre deviendrait

$$\Delta y.\Delta x\Big[\frac{d^2z}{\Delta y.\Delta x}+\theta'\Big]$$

le terme θ' étant, comme le terme θ, ou nul, ou indéfiniment décroissant lorsque Δx et Δy sont supposés de plus en plus petits. L'on a donc

$$\frac{d^2z}{\Delta y\Delta x}-\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}=\theta-\theta'$$

et puisque les dérivées $\frac{d^2z}{\Delta y\Delta x}$, $\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}$ sont indépendantes des accroissements $\Delta y\Delta x$, tandis que la différence $\theta-\theta'$ est ou nulle, ou susceptible de décroitre indéfiniment à mesure que ces accroissements convergent vers zéro, il en résulte nécessairement $\theta=\theta'$ et

$$\frac{d^2z}{\Delta y\Delta x}=\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}$$

La condition exprimée par cette équation s'étend d'elle-même à des cas de plus en plus compliqués. En effet l'on a d'abord

$$\frac{d^3z}{\Delta x^2\Delta y}=\frac{d^3z}{\Delta x\Delta y\Delta x}=\frac{d^3z}{\Delta y\Delta x^2}$$

on aurait de même pour le cas de trois variables

$$\frac{d^3z}{\Delta x.\Delta y.\Delta u}=\frac{d^3z}{\Delta x\Delta u\Delta y}=\frac{d^3z}{\Delta u\Delta x\Delta y}=\frac{d^3z}{\Delta u\Delta y\Delta x}=\frac{d^3z}{\Delta y\Delta u\Delta x}=\frac{d^3z}{\Delta y\Delta x\Delta u}$$

et ainsi de suite de proche en proche.

Donc, en principe général : *Quelque soit l'ordre dans lequel on effectue plusieurs dérivations successives*, si l'ordre seul change et que toutes choses soient égales d'ailleurs, *le résultat définitif reste toujours le même.*

21) Étant donné l'équation

$$z=f(x, y, v, u, \text{etc.})$$

dans laquelle les variables sont en nombre quelconque, il pourra se présenter deux cas, suivant que cette équation subsistera seule ou avec un certain nombre d'autres. Dans tous les cas, lors même qu'il y aurait autant d'équations que de variables moins une, nous introduirons par la pensée une nouvelle variable, *qui sera pour nous la variable indépendante*, et afin que toutes les autres en deviennent fonction, nous concevrons au besoin une ou plusieurs relations arbitraires que nous n'exprimerons pas, aussi longtemps que nous le jugerons convenable, et dont pourtant il nous sera toujours permis de disposer. Ce simple artifice nous sera d'un grand secours.

Soit d'abord

$$z=F(x, y)$$

Si nous différencions une première fois (y et x étant supposés fonctions de la variable indépendante non exprimée), nous aurons

$$dz=\frac{dz}{\Delta x}.dx+\frac{dz}{\Delta y}.dy$$

puis, différenciant de nouveau et observant que les dérivées partielles $\frac{dz}{\Delta x}$, $\frac{dz}{\Delta y}$ dépendent en général des fonctions x, et y, tandis que les différentielles dx, dy sont simplement fonction de la variable indépendante

$$d^2z=\frac{d^2z}{\Delta x^2}dx^2+2\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}dx.dy.+\frac{d^2z}{\Delta y^2}dy^2+\frac{dz}{\Delta x}d^2x+\frac{dz}{\Delta y}d^2y.$$

En continuant de la même manière, on obtiendrait successivement les différentielles de tous les ordres. Il nous suffira d'avoir

indiqué la marche des opérations, les calculs à faire n'offrant aucune difficulté. (1)

22) Suppposons maintenant qu'il s'agisse d'une fonction implicite

$$F(x,y)=0$$

ou si l'on veut

$$F(x,y)=\text{Cons}^{te}.$$

Pour passer du cas général, traité ci-dessus, au cas particulier dont il s'agit, nous poserons

$$z=\text{Cons}^{te}.$$

De la résulte $d^nz=0$ et les équations du n° 21 deviennent respectivement,

$$\frac{dz}{\Delta x}dx+\frac{dy}{\Delta y}dy=0 \qquad (1)$$

$$\frac{dz}{\Delta x}d^2x+\frac{dz}{\Delta y}d^2y+\frac{d^2z}{\Delta x^2}dx^2+2\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}dxdy+\frac{d^2z}{\Delta y^2}dy^2=0 \quad (2)$$

Quant à la variable indépendante, elle reste sous-entendue et liée par telle relation qu'on voudra à l'une ou l'autre des variables x et y. Cette circonstance permet d'appliquer les résultats obtenus à tous les cas possibles. Veut-on, par exemple, considérer en particulier la génération de Δy par Δx, de $\Delta^2 y$ par Δx^2, etc., il suffit de prendre x pour variable indépendante, ou plus généralement de concevoir entre x et la variable indépendante non exprimée une relation quelconque, représentée par une équation linéaire. Dès lors on a $dx=\text{cons}^{te}.$, $d^2x=0$ et les équations (1) et (2) donnent successivement, la première le rapport $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{\Delta x}$, la deuxième le rapport $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{\Delta x^2}$. On trouverait de même en poursuivant les calculs du N°. 21 le rapport $\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^ny}{\Delta x^n}$.

---

(1) Il est à observer que, dans toute équation différentielle, les dérivées peuvent être considérées comme constantes, tandis que les différentielles, dont elles sont les coefficients, restent continuement variables et convergent toutes ensemble soit vers zéro, *soit vers l'infini*. D'un autre côté, toute différentielle de l'ordre n est proportionnelle à la puissance n de l'accroissement arbitraire attribué à la variable indépendante. Si donc les différentielles sont prises pour variables (leurs coefficients devenant des nombres) il est visible que les équations, qui les contiennent, ont nécessairement homogènes.

La marche que nous venons de suivre est tout à fait générale. Elle s'applique de la même manière à un nombre quelconque d'équations simultanées. On voit d'ailleurs que, si l'on a choisi d'avance une des variables pour variable indépendante (ce qu'on exprime en considérant toutes les autres comme fonctions de celle-ci, et annulant en ce qui la concerne toutes les différentielles des ordres supérieurs), il est plus simple de faire les calculs en se plaçant immédiatement dans cette hypothèse.

23) Soit enfin une fonction de plusieurs variables indépendantes,

$$z=f(x,y).$$

Les équations du N° 21 sont immédiatement applicables, x et y étant deux fonctions arbitraires de la variable indépendante non exprimée.

En général on dispose jusqu'à un certain point de ces fonctions arbitraires, et l'on admet qu'elles se réduisent chacune à une équation linéaire. En ce cas l'on a pour le premier ordre dx=cons^{te}, dy=cons^{te}, et pour tous les autres ordres indistinctement $d^n x=0$, $d^n y=0$. Il vient donc conformément aux résultats précédemment obtenus

$$dz=\frac{dz}{\Delta x}dx+\frac{dz}{\Delta y}dy \qquad (1)$$

$$d^2z=\frac{d^2z}{\Delta x^2}dx^2+2\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}dx.dy+\frac{d^2z}{\Delta y_2}dy^2 \qquad (2)$$

on trouverait en poursuivant les calculs

$$d^3z=\frac{d^3z}{\Delta x^3}dx^3+3\frac{d^3z}{\Delta x^2\Delta y}dx^2dy+3\frac{d^3z}{\Delta x\Delta y^2}dxdy^2+\frac{d^3z}{\Delta y^3}dy^3 \quad (3)$$

et ainsi de suite, l'équation (1) étant la seule qui reste toujours la même, quelle que soit la nature des fonctions arbitraires x et y.

On observera que l'hypothèse, dans laquelle nous venons de nous placer est *restrictive*. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait d'une surface ayant pour équation

$$z=F(x,y)$$

par cela seul qu'on suppose x et y fonctions linéaires de la variable indépendante non exprimée, y *devient fonction linéaire de* x. Alors donc les équations (2) et (3) ne peuvent subsister que pour des sections planes, normales au plan des xy.

Les mêmes considérations s'appliquent à un système quelconque

d'équations comprenant autant de variables indépendantes qu'on voudra.

Nota. Il importe de ne pas perdre de vue l'observation précédente. On remarquera d'ailleurs, qu'introduire par la pensée une variable que l'on n'exprime point et dont on fait dépendre toutes les autres, au moyen de certaines relations arbitraires, ce n'est point en général un simple artifice auquel on soit ou non libre de recourir. Ce procédé est impérieusement prescrit, toutes les fois que le nombre des variables l'emporte de plus d'une unité sur celui des équations. Il est le seul qui puisse, en ce cas, donner un sens précis aux différenciations successives.

En résumé, quelque soit le nombre des variables sur lesquelles on opère explicitement, tout se réduit à considérer chacune d'elles comme fonction de la variable indépendante non exprimée. Dès lors, il n'est pas besoin d'autres règles que celles qui sont établies pour les cas les plus simples. Ces règles s'étendent d'elles-mêmes aux cas les plus compliqués et nulle difficulté sérieuse ne peut surgir dans leur application. Quant aux fonctions arbitraires que l'on introduit auxiliairement et qui restent sous-entendues, l'on en dispose au besoin, et s'il y a d'abord indétermination, cette indétermination même offre plus tard de précieuses ressources.

APPLICATIONS ANALYTIQUES.

Théorèmes fondamentaux concernant la fonction, son accroissement et ses dérivées successives.

24) Lemme. *La fonction est croissante ou décroissante*, [1] *suivant que la dérivée est positive ou négative.*

Lorsque nous avons établi la relation générale

$$\Delta y = (f'(x) + \eta)\Delta x$$

nous avons vu que, pour toute valeur finie de la dérivée $f'(x)$, la quantité η est indéfiniment décroissante à mesure que Δx converge vers zéro. Il suit de là qu'il suffit de diminuer convenablement l'intervalle Δx pour qu'en général $f'(x)$ devienne supérieur à η et donne son signe à la différence Δy. Or, si la fonction est croissante à partir de la valeur y, il existe nécessairement un certain intervalle, (si petit d'ailleurs qu'on voudra), dans l'étendue duquel la différence Δy est toujours positive. Il faut donc aussi que dans cet intervalle l'on ait constamment $f'(x) > 0$. On démontrerait de même que la fonction ne peut être décroissante sans que l'on ait en même temps $f'(x) < 0$, et cela pour toute l'étendue de l'intervalle où il y a décroissance.

Concluons que *le signe de la dérivée indique en général la marche de la fonction, la fonction étant croissante lorsque la dérivée reste positive, et décroissante lorsque la dérivée devient négative.*

25) Corollaire. Tant que l'on a $f'(x) >$ ou < 0, la marche de la fonction est uniforme, c'est-à-dire qu'arrivée en croissant ou en décroissant à l'état dans lequel on la considère, la fonction sort de cet état en continuant de croître ou de décroître. Lorsque $f'(x) = 0$, il y a doute et la fonction tend à rester stationnaire. Cette tendance est acusée par l'expression particulière qu'affecte la loi de génération $dy = f'(x)dx = 0$, mais elle ne peut persister, la loi dont il s'agit n'étant pas permanente. On sait d'ailleurs que la fonction reste

---

(1) La fonction est dite croissante, lorsqu'elle croit et décroit avec la variable. Elle est dite décroissante dans le cas contraire.

variable avec x : elle croit donc ou décroît constamment dans un certain intervalle, mesuré à partir de $\Delta x=0$, et suivant qu'elle est croissante ou décroissante dans cet intervalle, sa dérivée, nulle à l'origine, commence par être positive ou négative.

Partant de zéro, par hypothèse, la dérivée ne peut commencer par être positive ou négative, qu'autant qu'elle est croissante ou décroissante. D'un autre côté elle est croissante ou décroissante suivant le signe affecté par la dérivée seconde $f''(x)$. C'est donc à celle-ci qu'il faut recourir pour reconnaître la marche de la fonction.

Soit $f''(x)>0$. En ce cas la dérivée $f'(x)$ a une marche uniforme, et parvenue à zéro en croissant avec x, c'est en continuant de croître qu'elle s'en écarte. Elle est donc négative, puis nulle, puis positive en même temps que Δx. Il suit de là que la différence Δy commence par être positive *en deçà* comme *au-delà* de $\Delta x=0$. Ce n'est donc qu'en croissant que la valeur actuelle y peut d'abord changer. *Par ce motif on la nomme valeur minima.*

On verrait de même que pour $f''(x)<0$, la dérivée $f'(x)$ étant de signe contraire à Δx, la différence Δy commence par être négative *en deçà* comme *au-delà* de $\Delta x=0$. Ce n'est donc qu'en décroissant que la valeur y peut d'abord changer. *Par suite on la nomme valeur maxima.*

Soit enfin $f''(x)=0$. En ce cas raisonnons sur $f'(x)$ comme nous l'avons fait sur y et appliquons les résultats précédents.

A-t-on $f'''(x)>0$, $f'(x)=0$ est une valeur minima. Δy change de signe avec Δx et la fonction est croissante.

A-t-on $f'''(x)<0$, $f'(x)=0$ est une valeur maxima et la fonction est décroissante.

Soit en dernier lieu $f'''(x)=0$. Ce que nous venons d'établir pour $f(x)$, subsiste maintenant pour $f'(x)$ et cette dérivée est croissante ou décroissante suivant que $f^{\text{IV}}(x)$ est plus grand ou plus petit que zéro. Nous voici dès lors ramené à considérer le signe de $f'(x)$ comme dépendant de $f^{\text{IV}}(x)$, de la même manière qu'il dépendait primitivement de $f''(x)$. Les mêmes circonstances se reproduisent donc périodiquement, et il est visible que la marche de la fonction est toujours indiquée par le signe et le rang de la première des dérivées successives qui ne s'évanouit point.

Cette dérivée est-elle de rang impair, suivant qu'elle est positive ou négative, la fonction est croissante ou décroissante.

Est-elle de rang pair, la valeur actuelle y *est une valeur minima ou une valeur maxima suivant que la dérivée dont il s'agit est positive ou négative.*

Nous montrerons plus loin comment le calcul conduit avec une grande facilité aux conséquences que nous venons d'établir. En attendant il nous a paru bon de procéder directement et par simples déductions logiques. La voie du raisonnement, lorsqu'elle n'est point entravée d'obstacles difficiles à surmonter, offre à l'esprit un champ plus étendu. En la suivant, l'on voit mieux et l'on approfondit davantage.

26) Théorème. *L'accroissement de la fonction est égal au produit de l'accroissement de la variable par la valeur moyenne de la fonction dérivée.*

Reprenons l'équation générale

$$\Delta y = (f'(x) + \eta)\Delta x$$

et concevons l'intervalle Δx dérivée en m parties égales. A chacune des divisions ainsi obtenues correspond un accroissement de la fonction, et cet accroissement est déterminé par les valeurs particulières que les quantités $f'(x)$ et η affectent respectivement. L'on a ainsi

$$\Delta y_1 = [f'(x) + \eta_1]\frac{\Delta x}{m}$$

$$\Delta y_2 = \left[f'\left(x + \frac{\Delta x}{m}\right) + \eta_2\right]\frac{\Delta x}{m}$$

$$\Delta y_3 = \left[f'\left(x + \frac{2\Delta x}{m}\right) + \eta_3\right]\frac{\Delta x}{m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta y_m = \left[f'\left(x + \frac{(m-1)\Delta x}{m}\right) + \eta_m\right]\frac{\Delta x}{m}$$

Or la somme des différences successives Δy_1, Δy_2 etc. Δy_m est nécessairement égale à la différence totale Δy. Il vient donc,

$$\Delta y = \Delta x\left[\frac{f'(x) + f'\left(x + \frac{\Delta x}{m}\right) + \text{etc.} + f'\left(x + \frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)}{m} + \frac{\eta_1 + \eta_2 + \text{etc.} + \eta_m}{m}\right]$$

Cela posé, et les valeurs que $f'(x)$ peut prendre dans l'intervalle Δx étant, par hypothèse, toutes finies, imaginons d'abord que dans cet intervalle la fonction y soit toujours croissante ou toujours dé-

croissante. En ce cas les diverses valeurs, qu'affecte $f'(x)$, sont toutes de même signe. Imaginons ensuite que la fonction soit alternativement croissante et décroissante. En ce cas $f'(x)$ ne peut changer de signe qu'en passant par zéro. Donc, *dans tous les cas*, (la continuité subsistant) la moyenne représentée par le terme

$$\frac{f'(x)+f'\left(x+\frac{\Delta x}{m}\right)+\text{ etc. }+f'\left(x\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)}{m}$$

est une quantité intermédiaire entre les valeurs extrêmes que prend $f'(x)$ et par conséquent elle se réduit à une expression de la forme $f'(x+\theta\Delta x)$, θ dépendant de m, mais étant toujours plus petit que l'unité.

D'un autre côté m est arbitraire et l'on en peut disposer de manière à rendre aussi petite que l'on veut l'une quelconque des valeurs affectées par γ dans l'intervalle Δx. Delà résulte

$$\Delta y=[f'(x+\theta\Delta x)+\gamma.]\Delta x$$

γ étant une quantité qui se rapproche indéfiniment de zéro à mesure que m est supposé de plus en plus grand.

Soit maintenant $f'(x+\theta_1\Delta x)$ la moyenne rigoureuse de la suite infinie des valeurs que $f'(x)$ prend dans l'intervalle Δx, l'on a évidemment

$$f'(x+\theta_1\Delta x)-f'(x+\theta\Delta x)=\gamma_1$$

γ_1 convergeant vers zéro en même temps que γ. Substituant l'on trouve,

$$\Delta y-f'(x+\theta_1\Delta x)\Delta x=\Delta x[\gamma-\gamma_1]$$

Or le premier membre de cette équation est indépendant de m, tandis que le second, s'il n'était pas nul, pourrait être rendu aussi petit que l'on veut en attribuant à m des valeurs de plus en plus grandes. Chacun de ces deux membres est donc nul de lui-même, et l'on a généralement

$$\Delta y=f'(x+\theta_1\Delta x)\cdot\Delta x$$

θ_1 ne dépendant pas de m, mais restant toujours compris entre 0 et 1.

Le théorème que nous venons de démontrer peut s'énoncer de la manière suivante :

L'accroissement de la fonction est égal au produit de l'accroissement de la variable par la valeur moyenne de la dérivée.

27) Il semble au premier abord que la valeur moyenne de la dérivée ne soit susceptible d'expression numérique que dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, c'est-à-dire lorsque la dérivée ne fait que croître ou décroître entre des limites déterminées. Il n'en est point ainsi, et cette moyenne est toujours numériquement assignable, lorsque la fonction reste finie dans l'intervalle Δx.

Pour démontrer ce corollaire, supposons d'abord une suite d'intervalles pour lesquels on ait respectivement,

$$\Delta y_1 = c_1 \Delta x_1, \qquad \Delta y_2 = c_2 \Delta x_2, \qquad \Delta y_3 = c_3 \Delta x_3, \text{ etc.}$$

Considérons en particulier l'une quelconque des moyennes exprimées par c_1, c_2, etc. Les valeurs, en nombre infini, qui concourent à la formation de cette moyenne sont généralement inégales. Néanmoins l'on peut leur substituer d'autres valeurs toutes égales entr'elles et à la moyenne dont il s'agit. Veut-on en outre rapporter les moyennes c_1, c_2, etc., à un même intervalle $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 +$ etc., elles deviennent respectivement $c_1 \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x}$, $c_2 \dfrac{\Delta x_2}{\Delta x}$, etc. et fournissent une moyenne générale exprimée par la somme

$$c_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta x} + c_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta x} + \text{etc.} = M.$$

On a donc

$$\Delta y_1 + \Delta y_2 + \text{etc.} = \Delta y = M \Delta x.$$

M restant compris entre la plus petite et la plus grande valeur des moyennes partielles c_1, c_2, etc.

Supposons maintenant que dans l'intervalle Δx, la dérivée se présente, tant de fois qu'on voudra, sous la forme symbolique $\frac{1}{0}$, laquelle ne peut qu'être accidentelle et non permanente. Soit d'ailleurs, x_1, x_2, x_3, etc. les valeurs particulières de x qui rendent la dérivée $f'(x)$ infinie, et Δx_1, Δx_2, Δx_3, etc. une suite de très petits intervalles, comptés, moitié en deçà, moitié au-delà, des valeurs x_1, x_2, x_3 qui leur correspondent respectivement. L'on aura d'après ce qui précède

$$\Delta y = M[\Delta x - \Delta x_1 - \Delta x_2 - \Delta x_3 - \text{etc.}] + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \text{etc.}$$

Or à mesure que chacun des intervalles Δx_1, Δx_2, etc. est pris de plus en plus petit, chacune des différences Δy_1, Δy_2, etc. dé-

croît indéfiniment et converge vers zéro. Donc la moyenne M converge vers une limite déterminée et l'on a toujours

$$\text{Lim. M}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Lorsque les valeurs de la dérivée sont toutes de même signe, la quantité représentée par Lim. M est une expression de la forme $f'(x+\theta_1\Delta x)$. Dans le cas contraire la même condition peut encore être remplie, mais elle ne subsiste pas nécessairement.

28) *Corollaire I. Lorsque pour une valeur particulière attribuée à la variable, la fonction*, jusques là continue, *se présente sous la forme symbolique* $\frac{1}{0}$, *il en est de même de la dérivée.*

Nommons x_3 la valeur particulière dont il s'agit, et x_1 une autre valeur aussi rapprochée qu'on voudra de x_3, mais telle que de x_1 à x_3 la fonction soit toujours croissante en grandeur absolue. Soit en outre x_2 une valeur intermédiaire. En admettant que pour $x=x_2$ la dérivée $f'(x)$ prit accidentellement la forme $\frac{1}{0}$, il est visible que cette forme ne pourrait persister. Il est donc permis de poser immédiatement $f'(x_2)=\text{B}$, la valeur B étant numériquement assignable. Or, si grand que soit B, je dis que $f'(x)$ doit augmenter encore de x_2 à x_3. Pour le démontrer, prenons à partir de x_2 l'intervalle Δx_2 plus petit que x_3-x_2. Nous aurons pour accroissement correspondant de la fonction

$$\Delta y_2=f'(x_2+\theta_1\Delta x_2)\Delta x_2$$

Suppose-t-on maintenant que $f'(x)$ n'augmente pas de x_2 à x_3, la valeur moyenne $f'(x_2+\theta\Delta x_2)$ est inférieure à B et il vient,

$$\Delta y_2<\text{B}\Delta x_2$$

d'où à fortiori

$$\Delta y_2<\text{B}(x_3-x_2)$$

Mais quelque soit B, si grand qu'on le suppose, cette dernière inégalité est toujours impossible, puisque par hypothèse Δy_2 croît indéfiniment à mesure que Δx_2 converge vers la limite x_3-x_2. On ne peut donc admettre que la dérivée $f'(x)$, lors même qu'elle décroîtrait à partir de x_1, ne prenne pas ensuite de x_2 à x_3 des valeurs toujours de plus en plus grandes et cela, sans limite assi-

gnable. Il faut donc nécessairement que $f'(x_2)$ affecte la forme symbolique $\frac{1}{0}$.

Il suit de là que, si pour une valeur particulière, attribuée à la variable, la fonction, jusque là continue se présente sous la forme $\frac{1}{0}$, il en est de même de toutes ses dérivées successives.

Réciproquement toute valeur de la variable qui ne rend pas infinie la dérivée de l'ordre* n *ne rend infinie, ni la fonction, ni aucune des dérivées précédentes.

On ne perdra pas de vue qu'une expression de la forme $\frac{1}{0}$ ne peut jamais constituer ce que nous appelons une valeur particulière.

29) *Corollaire* 2. La fonction étant continue dans l'intervalle Δx, l'on a

$$\Delta y = f'(x+\theta_1 \Delta x).\Delta x \qquad (1)$$

et la dérivée $f^n(x)$ ne se présente pas en général sous la forme $\frac{1}{0}$.

Cela posé, quelles que soient les valeurs particulières affectées par les n premières dérivées, l'on peut toujours concevoir l'intervalle Δx assez petit, pour que dans cet intervalle, les dérivées dont il s'agit restent continues. Or en ce cas l'équation (1) est applicable à ces dérivées, et il vient

$$f'(x+\theta_1 \Delta x) = f'(x) + f''(x+\theta_1\theta_2 \Delta x).\theta_1 \Delta x$$
$$f''(x+\theta_1\theta_2 \Delta x) = f''(x) + f'''(x+\theta_1\theta_2\theta_3 \Delta x).\theta_1\theta_2 \Delta x$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{n-1}(x+\theta_1\theta_2\dots\theta_{n-1}\Delta x) = f^{n-1}(x) + f^n(x+\theta_1\theta_2\dots\theta_n \Delta x).\theta_1\theta_2\dots\theta_{n-1}\Delta x.$$

On a donc en substituant

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \theta_1 \Delta x^2 f''(x) + \theta_1^2\theta_2 \Delta x^3 f'''(x) + \text{etc.} +$$
$$\theta_1^{n-2}\theta_2^{n-3}\dots\theta_{n-2}\Delta x^{n-1} f^{n-1}(x) + \theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}\dots\theta_{n-1}\Delta x^n f^n(x+\theta_1\theta_2\dots\theta_n \Delta x).$$

et si l'on suppose que, pour la valeur particulière attribuée à la variable, les $n-1$ premières dérivées s'annulent toutes à la fois

$$\Delta y = \theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}\dots\theta_{n-1}\Delta x^n f^n(x+\theta_1\theta_2\theta_3\dots\theta_n \Delta x). \qquad (2)$$

Les quantités θ_1, θ_2, etc. θ_n, dépendent en général de x et de

Δx : (1) néanmoins chacune d'elle reste toujours positive et moindre que l'unité. Quant à l'intervalle Δx, il est aussi petit que l'on veut et dès lors on peut admettre que dans cet intervalle $f^n(x)$ et $f^n(x+\theta_1\theta_2...\theta_n\Delta x)$ sont constamment de même signe. Il suit de là que les premiers changements subis par la fonction et exprimés par la différence Δy sont des accroissements ou des décroissements suivant le rang ou le signe de la première des dérivées successives qui ne s'évanouit point. Delà résultent immédiatement les conséquences établies ci-dessus N° 25 :

---

(1) Lorsque la dérivée de l'ordre n est constante l'on peut poser $\theta_n=0$. Sauf ce cas exceptionnel, les quantités θ_1, θ_2, etc. sont toutes essentiellement variables et leur expression dépend de la nature de la fonction sur laquelle on opère. Toutefois il est à observer que ces quantités convergent vers certaines limites à mesure que Δx converge vers zéro. Proposons-nous de déterminer quelles sont ces limites.

Soit $f(a+\theta\Delta x)$ la moyenne des valeurs affectées par $f(x)$ dans l'intervalle Δx, divisé par hypothèse en m parties égales. Les valeurs, en nombre limité qui concourent à la formation de cette moyenne sont respectivement $f(a)$, $f\left(a+\frac{\Delta x}{m}\right)$ $f\left(a+\frac{2\Delta x}{m}\right)$ etc. $f\left(a+\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)$. Nous supposerons, pour plus de généralité, que la valeur $x=a$ annule les $(n-1)$ premières dérivées et nous aurons suivant la formule du N° 29

$$f(a+\Delta x)-f(a)=\theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}.\,\theta_{n-2}\theta_{n-1}\,\Delta x^n f^n(a+\theta_1\theta_2..\theta_n\Delta x)$$

ou plus simplement

$$f(a+\Delta x)-f(a)=\Delta x^n.\alpha.f^n(a+6\Delta x).$$

α et 6 restant compris entre 0 et 1 et ne dépendant plus que de Δx. De là résulte,

$$f(a)-f(a)=0.$$

$$f\left(a+\frac{\Delta x}{m}\right)-f(a)=\left(\frac{\Delta x}{m}\right)^n\alpha_1 f^n\left(a+6_1\frac{\Delta x}{m}\right)$$

$$f\left(a+\frac{2\Delta x}{m}\right)-f(a)=2^n.\left(\frac{\Delta x}{m}\right)^n\alpha_2 f^n\left(a+6_2\frac{2\Delta x}{m}\right)$$

. . . .

$$f\left(a+\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)-f(a)=(m-1)^n\left(\frac{\Delta x}{m}\right)^n\alpha_{m-1} f^n\left(a+6_{m-1}\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right).$$

d'où, ajoutant membre à membre et divisant par m.

$$\frac{1}{m}\left[f(a)+f\left(a+\frac{\Delta x}{m}\right)+\text{etc.}+f\left(a+\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)\right]-f(a)=$$

$$\frac{\Delta x^n}{m^{n+1}}\left[\alpha_1 f^n\left(a+6_1\frac{\Delta x}{m}\right)+2^n\alpha_2 f^n\left(a+6_2\frac{2\Delta x}{m}\right)+\text{etc.}\right]$$

1°. *La marche de la fonction est toujours indiquée par le signe et le rang de la première des dérivées qui ne s'évanouit point.*

2°. *Cette dérivée est-elle de rang impair, suivant qu'elle est positive ou négative, la fonction est croissante ou décroissante.*

Mais, d'un autre côté, l'on a directement

$$f(a+\theta\Delta x)-f(a)=\Delta x^n.\theta^n.\alpha_\rho.f^n(a+6_\rho.\theta.\Delta x).$$

Il vient donc en égalant les seconds membres de ces deux équations et supprimant le facteur commum Δx^n.

$$\theta^n=\frac{1}{m^{n+1}}\left[\frac{\alpha_1 f^n\left(a+6_1\frac{\Delta x}{m}\right)}{\alpha_\rho f^n(a+6_\rho.\theta.\Delta x)}+2.^n\frac{\alpha_2 f^n\left(a+6_2\frac{2\Delta x}{m}\right)}{\alpha_\rho f^n(a+6_\rho\theta.\Delta x)}+\text{etc.}\right.$$

$$\left.+(m-1)^n\frac{\alpha_{m-1} f^n\left(a+6_{m-1}\frac{(m-1)\Delta x}{m}\right)}{\alpha_\rho f^n(a+6_\rho.\theta.\Delta x)}\right]$$

Or à mesure que Δx converge vers zéro chacun des rapports $\frac{\alpha_r f^n\left(a+6_r.\frac{r\Delta x}{m}\right)}{\alpha_\rho f^n(a+6_\rho\theta\Delta x)}$ converge vers l'unité. En ce cas donc c'est vers une limite, généralement variable avec m et n, *mais toujours indépendante de la nature de la fonction* que θ^n converge. On voit d'ailleurs que cette limite a pour expression $\frac{1+2^n+3^n+\text{etc.}+(m-1)^n}{m^{n+1}}$

Cela posé, considérons en particulier la fonction $(x-a)^n$ dont les $(n-1)$ premières dérivées s'annulent pour $x=a$, et observons que cette fonction est elle même la dérivée première de la fonction $y=F(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$. Si l'on applique ici l'équation du N°. 26.

$$\Delta y=[F'(x+\theta\Delta x)+\gamma]\Delta x$$

on a $x=a$, $\Delta x=x-a$, $\Delta y=\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$, $F'(x\pm\theta\Delta x)=\theta^n(x-a)^n$, il vient donc,

$$\theta^n=\frac{1}{n+1}-\frac{\gamma}{\Delta x^n}.$$

γ convergeant vers zéro lorsque m est supposé de plus en plus grand, c'est-à-dire lorsque la moyenne que l'on considère se rapproche indéfiniment de la moyenne rigoureuse qui répond à la suite infinie des valeurs comprises dans l'intervalle $x-a$.

Soit θ_0 la valeur que prend θ pour cette moyenne rigoureuse, on trouve immédiatement

$$\theta_0^n=\frac{1}{n+1}$$

3° ***Est-elle au contraire de rang pair, la valeur de la fonction est minima ou maxima, suivant que la dérivée dont il s'agit est positive ou négative.***

En résumé s'il s'agit des moyennes rigoureuses repondant à l'intervalle $x-a$ et exprimées par $f(a+\theta_0\Delta x)$ [les dérivées successives $f'(a)$ $f''(a)$, etc. étant supposées nulles jusqu'à celle de l'ordre n exclusivement] l'on a pour le cas particulier ou $f(x)=(x-a)^n$.

$$\theta_0^n = \frac{1}{n+1}$$

et en général

$$\text{Lim } \theta_0^n = \frac{1}{n+1}$$

Comme conséquence du principe que nous venons d'établir, nous remarquerons relativement à la fonction $f'(x)$ que ses $(n-2)$ premières dérivées s'annulent dans l'hypothèse $x=a$. il vient donc

$$\text{Lim. } \theta_1^{n-1} = \frac{1}{n}$$

On trouverait de même relativement aux fonctions $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. $f^{n-1}(x)$

$$\text{Lim. } \theta_2^{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

$$\text{Lim. } \theta_3^{n-3} = \frac{1}{n-1}$$

. . . .

$$\text{Lim.} \theta_{n-1} = \frac{1}{2}.$$

et par suite

$$\theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}\ldots\theta_{n-1} = \frac{1}{1.2.\quad\quad n}.+\omega$$

ω convergeant vers zéro en même temps que Δx.

On observera que lorsque la dérivée du second ordre ne s'évanouit pas, *si petite que soit d'ailleurs la valeur qu'elle affecte*, θ_1 a pour limite constante la fraction $\frac{1}{2}$. Soit au contraire $f''(a)=0$. En ce cas la limite de θ_1 devient $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

ou plus généralement $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, n étant l'ordre de la première des dérivées successives qui ne s'évanouit point. Cette permanence et ce changement *brusque* des diverses limites assignées à θ_1, suivant le nombre des dérivées successives qui s'annulent pour une même valeur attribuée à la variable, présentent un résultat dont il est facile de se rendre compte, mais qui n'en est pas moins extrêmement curieux.

Nous verrons plus loin comment la simple considération de la loi de génération conduit directement aux mêmes conséquences.

30) Nous avons supposé jusqu'ici que les dérivées successives restaient en général fonction de la variable. Il importe d'examiner en particulier le cas où la dérivée de l'ordre n est constante, indépendamment de toute valeur attribuée à x.

Soit par exemple

$$f^n(x)=\text{cons}^t. \qquad (1)$$

Les dérivées des ordres supérieurs à n sont toutes nulles. Quant à celles des ordres inférieurs, quelle que soit la valeur particulière attribuée à la variable, elles ne peuvent jamais se présenter sous la forme $\frac{1}{0}$ (voir N° 28). Cela posé, si l'on remarque que, pour $x=a$, les dérivées de la fonction $(x-a)^r$ sont toutes nulles à l'exception de celle de l'ordre r qui se réduit à $1.2.3\ldots r.$, il est évident qu'il suffit d'écrire

$$\Phi(x)=(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\ 2}f''(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^n}{12\cdot\cdot n}f^n(a).$$

pour que l'on ait en général $\Phi^r(a)=f^r(a)$ et que par conséquent les dérivées successivées de la fonction $y=f(x)-\Phi(x)$ s'annulent *toutes sans exception*, dans l'hypothèse $x=a$. Mais alors l'équation générale du N° 29

$$\Delta y=\text{F}'(x)\Delta x+\theta.\text{F}''(x)\Delta x^2+\text{ etc}.$$

se réduit à $\Delta y=0$, il vient donc en faisant $x=a$, $\text{F}(x)=f(x)-\Phi(x)$, et remplaçant Δx par $(x-a)$.

$$\Delta y=f(x)-f(a)-\Phi(x)=0.$$

d'où substituant

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}+\text{etc}+f^n(a)\frac{(r-a)^n}{12\cdot n}.\ (2).$$

Il suit de là que les relations (1) et (2) s'impliquent mutuelllement, les fonctions algébriques, rationnelles et entières, étant les seules qui puissent se réduire à des constantes par une suite de dérivations.

31) En général il est impossible que toutes les dérivées d'une fonction s'annulent à la fois pour une *même valeur particulière* attribuée à la variable. Cela résulte de la démonstration précédente. On peut d'ailleurs le voir directement. En effet, y étant par hypothèse fonction continue de x, l'on peut avoir accidentellement

$dy=0$, mais si telle est à partir de la valeur $x=a$ l'expression de la loi de génération, cette même expression ne peut s'appliquer à la suite infinie des états immédiatement successifs. Or, les modifications que la loi doit subir sont régies par la première des équations différentielles qui cesse de se présenter sous la forme $d^n y=0$. On ne peut donc admettre que l'on ait toujours et quelque soit n, $f^n(a)=0$, puisque ce serait réduire à néant les modifications dont il s'agit et par conséquent rendre permanente la loi de génération.

Il en est autrement, lorsque la fonction converge vers zéro à mesure que la variable est supposée de plus en plus grande. En ce cas les dérivées convergent toutes vers zéro en même temps que la fonction.

Pour démontrer ce principe, nous ferons observer que supposer $f(x)$ convergeant vers zéro, alors que x croit indéfiniment, c'est exprimer relativement à la fonction $f\left(\frac{1}{z}\right)=\varphi(z)$ qu'elle converge vers zéro en même temps que z. On a par conséquent Lim. $\varphi(z)=\varphi(0)=0$. Mais d'ailleurs, la continuité subsistant, l'on a en général

$$\varphi(z+\Delta z)-\varphi(z)=\varphi'(z+\theta\Delta z)\cdot\Delta z.$$

Il vient donc en faisant d'abord $z=0$ puis remplaçant Δz par z.

$$\varphi(z)=\varphi'(\theta z)\cdot z.$$

de la résulte pour $z=0$

$$\varphi'(0)\cdot[z=0]=0.$$

D'un autre côté, si l'on différencie les équations de condition

$$x=\frac{1}{z}, \qquad f(x)=\varphi(z)$$

l'on trouve

$$f'\left(\frac{1}{z}\right)=-\varphi'(z)\cdot z^2.$$

et l'on en déduit d'après ce qui précède

$$f'\left(\frac{1}{z=0}\right)=0.$$

Or $f'\left(\frac{1}{z}\right)$ est continu dans un certain intervalle mesuré à partir de $z=0$ donc $f'\left(\frac{1}{z}\right)$ converge vers zéro à mesure que x croit

indéfiniment. Dès lors il en est de même de $f''(x)$, puis de $f'''(x)$ et ainsi de suite à l'infini.

En ce cas la loi de génération *tend à devenir permanente* à mesure que les valeurs affectées par la variable sont supposées de plus en plus grandes. Quant à la fonction $\phi(z)$, on remarquera que ce ne sont point ses dérivées successives qui s'annulent toutes pour $z=0$ (ce que nous avons démontré impossible), mais bien les produits $z\phi'(z)$, $z^2\phi''(z)$, etc.

32) *Corollaire* 3. Soit deux fonctions $y=f(x)$, $u=\phi(x)$, supposées telles que l'on ait :

1° Pour $x=a$ et en ce qui concerne les $(n-1)$ premières dérivées

$$f'(a)=\phi'(a),\ f''(a)=\phi''(a),\ \text{etc. } f^{n-1}(a)=\phi^{n-1}(a).$$

2° Pour une même valeur quelconque x comprise entre a et $a+h$

$$f^{n-1}(x)>\phi^{n-1}(x).$$

Je dis que pour toute valeur de Δx comprise entre 0 et h, l'on a nécessairement

$$\Delta y>\Delta u.$$

En effet, si l'on applique à la fonction $y-u=f(x)-\phi(x)$ la formule 2 du N° 29, en observant que pour $x=a$ les $(n-2)$ premières dérivées s'annulent, il vient

$$\Delta y-\Delta u=\theta_1^{n-2}\theta_2^{n-3}\ldots\theta_{n-2}\Delta x^{n-1}[f^{n-1}(x+\theta_1\theta_2\ldots\theta_{n-1}\Delta x)$$
$$-\phi^{n-1}(x+\theta_1\theta_2\ldots\theta_{n-1}\Delta x)].$$

Or de la résulte évidemment $\Delta y>\Delta u$. C. Q. F. D.

Remarque. En vertu de la relation $f^{n-1}(a)=\phi^{n-1}(a)$, il est indifférent de poser

$$f^{n-1}(x)>\phi^{n-1}(x)$$

ou bien

$$[\Delta f^{n-1}(x)=f^n(a+\theta\Delta x)\cdot\Delta x]>[\Delta\phi^{n-1}(x)=\phi^n(a+\theta'\Delta x)\cdot\Delta x]$$

Il suffit donc que l'on ait :

1° En ce qui concerne les $(n-1)$ premières dérivées

$$f'(a)=\phi'(a),\ f''(a)=\phi''(a),\ \text{etc. } f^{n-1}(a)=\phi^{n-1}(a)$$

2° En ce qui concerne les valeurs moyennes des dérivées de l'ordre n

$$f^n(a+\theta\Delta x)>\text{ ou }<\phi^n(a+\theta'\Delta x)$$

pour qu'il en résulte nécessairement

$$\Delta y > \text{ ou } < \Delta u.$$

33) Soit $f(x)$ une fonction continue supposée telle que dans l'intervalle compris entre $x=a$ et $x=a+h$ la dérivée $f^{n-1}(x)$ *reste toujours finie.* Si l'on désigne par M et m la plus grande et la plus petite des valeurs que la moyenne $f^{n}(a+\theta\Delta x) = \frac{f^{n-1}(x)-f^{n-1}(a)}{x-a}$ affecte dans l'intervalle h, et par $\phi(x)$, $\psi(x)$ les deux fonctions algébriques

$$\phi(x)=(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}.f''(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}.f^{n-1}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots.n}\text{M}$$

$$\psi(x)=(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)}f^{n-1}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}m$$

On aura d'abord pour l'une quelconque des $(n-1)$ premières dérivées, celle de l'ordre p par exemple

$$f^{p}(a)=\phi^{p}(a)=\psi^{p}(a)$$

et ensuite

$$\Delta f^{n-1}(x) > [\Delta\psi^{n-1}(x)=m\Delta x]$$
$$\Delta f^{n-1}(x) < [\Delta\phi^{n-1}(x)=\text{M}\Delta x].$$

Or de là résulte conformément au principe établi N°. 32

$$\Delta f(x) > \Delta\psi(x)$$
$$\Delta f(x) < \Delta\phi(x)$$

c'est-à-dire

$$f(x) > f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots.n}m.$$

$$f(x) < f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\ 2\ ..\ (n-1)}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}\text{M}$$

Si donc on exprime par $f^n(a+\theta(x-a))$ une certaine valeur comprise entre m et M, il vient nécessairement

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^n(a+\theta(x-a)).$$

On observera

1° Que θ est une fraction

2° Que l'expression $f^n(a+\theta(x-a))$ a une valeur intermédiaire entre M et m, limites nécessairement plus resserrées que celles qui répondent à la plus grande et à la plus petite des valeurs affectées par $f^n(x)$ dans l'intervalle $x-a$.

3° Que les limites M et m sont toujours numériquement assignables, sauf le cas exceptionnel où la dérivée $f^n(x)$ deviendrait infinie pour la valeur particulière $x=a$.

34) Les hypothèses du N° 33 étant maintenues, supposons en outre que les $(n-1)$ premières dérivées s'annulent pour $x=a$; il vient alors

$$f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^n(a+\theta(x-a)).$$

Mais on a d'ailleurs en faisant $x=a$, puis remplaçant Δx par $x-a$ dans l'équation (2) du N° 29

$$f(x)-f(a)=\theta_1^{n-1}\theta_2^{n-2}\cdots\theta_{n-1}.(x-a)^n f^n(a+\theta_1\theta_2\ldots\theta_n(x-a)).$$

il vient donc en divisant membre à membre et supprimant le facteur commun $(x-a)^n$

$$\theta_1^{n-1}.\theta_2^{n-2}\ldots\theta_{n-1}=\frac{1}{1.2\cdots n}\,\frac{f^n(a+\theta(x-a))}{f^n(a+\theta_1\theta_2\ldots\theta_n(x-a))}$$

ou passant à la limite et faisant $x=a$

$$\text{Lim.}\,\theta_1^{n-1}.\theta_2^{n-1}\ldots\theta_{n-1}.=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n.}$$

On trouverait de même en appliquant ce qui précède à la dérivée $f'(x)$

$$\text{Lim.}\,\theta_2^{n-2}\theta_3^{n-3}\ldots\theta_{n-1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n-1}$$

De là résulte

$$\text{Lim.}\,\theta_1^{n-1}=\frac{1}{n}$$

ou

$$\text{Lim.}\,\theta_1=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Ce résultat (1) est remarquable en ce qu'il assigne diverses limites à la quantité θ_1 *suivant le nombre* des dérivées successives qui s'évanouissent à partir de la dérivée du second ordre.

35) Reprenons le développement du N° 33

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$

$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^n(a+\theta(x-a)).$$

et supposons que la valeur $x=a$ rende infinie la dérivée de l'ordre n. En ce cas le développement ne peut être continué sans changer de forme, et si l'on veut ajouter de nouveaux termes à ceux qu'il contient, il est nécessaire de déterminer quelle est la loi de formation des termes suivants. Proposons-nous cette recherche en la res-

(1) Veut-on parvenir directement à ce résultat, l'on remarque que, la valeur $x=a$ annulant par hypothèse les $(n-1)$ premières dérivées, la différence Δy doit être considérée comme dépendant :

1° De la loi de génération de l'ordre n, $d^ny=f^n(a).\Delta x^n$.

2° Des modifications que cette loi subit dans l'intervalle $\Delta x=x-a$.

Cela posé, si l'on considère le rapport de l'accroissement effectif Δy à l'accroissement qui résulterait du développement de la loi, $d^ny=f^n(a)\Delta x^n$, supposée permanente, il est visible que ce rapport tend vers l'unité à mesure que Δx converge vers zéro. Or la fonction $\left(z=\frac{(x-a)^n}{1.2...n}f^n(a)\right)$ est précisément telle que, ses $(n-1)$ premières dérivées s'annulant dans l'hypothèse $x=a$, l'accroissement Δz est régi par la loi constante $d^nz=f^n(a)\Delta x^n$. On a donc nécessairement

$$\text{Lim.}\frac{\Delta z}{\Delta y}=1$$

d'où substituant et faisant $x=a$ après la suppression du facteur $(x-a)^n$

$$\text{Lim.}\,\theta_1^{n-1}.\theta_2^{n-2}..\theta_{n-1}=\frac{1}{1.2...n}.$$

treignant au cas où la dérivée $f^n(a)$ ne devient infinie que par l'annulation d'un facteur algébrique susceptible d'être mis en évidence.

Soit par exemple

$$f^n(x) = \frac{F(x)}{(x-a)^r}$$

r étant plus grand que zéro et $F(a)$ ne se présentant point sous la forme $\frac{1}{0}$.

L'on a

$$\Delta f^{n-1}(x) = f^n(a+\theta(x-a))\cdot(x-a) = F(a+\theta(x-a))\cdot\frac{(x-a)^{1-r}}{\theta^r}$$

il vient donc aussi $r<1$

La fonction $F(x)=(x-a)^r f^n(x)$ prenant une valeur finie pour $x=a$, ses dérivées successives $F''(a)$, $F'''(a)$ etc., ne se présentent pas en général sous la forme $\frac{1}{0}$. L'on a donc d'après ce qui précède,

$$F(x) = F(a) + (x-a)F'(a) + \text{etc.} + \frac{(x-a)^\rho}{1.2\ldots\rho}F^\rho(a+\theta(x-a)).$$

ou désignant par M_1 et m_1 la plus grande et la plus petite des valeurs affectées par la moyenne $F^\rho(a+\theta(x-a))$ dans l'intervalle $x-a=h$, et remplaçant $F(x)$ par sa valeur $(x-a)^r f^n(x)$.

$$f^n(x) > F(a)\cdot(x-a)^{-r} + F'(a)\cdot(x-a)^{1-r} + \text{etc.} + \frac{(x-a)^{\rho-r}}{1\cdot2\cdots\rho}m_1$$

$$f^n(x) < F(a)\,(x-a)^{-r} + F'(a)\cdot(x-a)^{1-r} + \text{etc.} + \frac{(x-a)^{\rho-r}}{1\cdot2\cdots\rho}M_1.$$

c'est-à-dire

$$df^{n-1}(x) > d\Big[\frac{(x-a)^{1-r}}{1-r}F'(a) + \frac{(x-a)^{2-r}}{2-r}+F'(a) + \text{etc.}$$

$$+\frac{(x-a)^{\rho+1-r}}{\rho+1-r}\,\frac{m_1}{1.2\ldots\rho}\Big] \qquad (1)$$

$$df^{n-1}(x) < d\Big[\frac{(x-a)^{1-r}}{1-r}F(a) + \frac{(x-a)^{2-r}}{2-r}F'(a) + \text{etc.}$$

$$+\frac{(x-a)^{\rho+1-r}}{\rho+1-r}\cdot\frac{M_1}{1.2\ldots\rho}\Big] \qquad (2)$$

Cela posé, si l'on prend les deux fonctions algébriques

$$\phi(x)=(x-a)f(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$

$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cdot f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^{n-r}}{(1-r)(2-r)\ldots(n-r)}F(a)+\text{etc.}$$

$$+\frac{(x-a)^{\rho+n-r}}{(\rho+1-r)(\rho+2-r)\ldots(\rho+n-r)}\cdot\frac{M_1}{1.2\ldots\rho}$$

$$\psi(x)=(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\text{etc.}$$

$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^{n-1}}{(1-r)(2-r)\ldots(n-r)}F(a)+\text{etc.}$$

$$+\frac{(x-a)^{\rho+n-r}}{(\rho+1-r)(\rho+2-r)\ldots(\rho+n-r)}\cdot\frac{m_1}{1.2\ldots\rho}$$

il est visible que l'on a pour l'une quelconque des $(n-1)$ premières dérivées, celles de l'ordre q par exemple

$$\phi^q(a)=\psi^q(a)=f^q(a).$$

et ensuite

$$d\phi^{n-1}(x)=d\Big[\frac{(x-a)^{1-r}}{1-r}F(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{\rho+1-r}}{\rho+1-r}\;\frac{M_1}{1.2\ldots\rho}\Big]$$

$$d\psi^{n-1}(x)=d\Big[\frac{(x-a)^{1-r}}{1-r}F(a)+\text{etc.}+\frac{(-a)^{\rho+1-r}}{\rho+1-r}\;\frac{m_1}{1.2\ldots\rho}\Big]$$

il vient donc en vertu de inégalités (1) et (2)

$$df^{n-1}(x)<d\phi^{n-1}(x).$$
$$df^{n-1}(x)>d\psi^{n-1}(x).$$

d'où

$$\Delta f(x)<\Delta\phi(x)$$
$$\Delta f(x)>\Delta\psi(x).$$

et par conséquent

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\text{etc.}+\frac{12\ldots(n-1)}{(x-a)^{n-1}}f^{n-1}(a)$$

$$+\frac{(x-a)^{n-r}}{(1-r)\ldots(n-r)}F(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{\rho+n-1-r}}{(\rho-r)\ldots(\rho+n-r).}\cdot\frac{F^{\rho-1}(a)}{1.2\ldots(\rho-1)}$$

$$+\frac{(x-a)^{\rho+n-r}}{(\rho+1-r)\;.\;(\rho+n-r)}\cdot\frac{F^{\rho}(a+\theta.(x-a))}{1.2.\;.\;\rho.}$$

La fonction $F(x)$ peut être telle que l'une de ses dérivées, celle de l'ordre p par exemple, devienne infinie pour $x=a$. S'il en est ainsi et que cela dépende encore de l'annulation d'un facteur algébrique $(x-a)^s$, la règle précédente est applicable au développement

$$F(x)=F(a)+(x-a)F'(a)+\text{etc.}$$

et ainsi de suite, la question se trouvant complètement résolue pour le cas de l'hypothèse où nous nous sommes placé.

36) Soit en dernier lieu, $f(x)=\dfrac{\phi(x)}{(x-a)^m}$, m étant positif, entier ou fractionnaire et $\phi(a)$ ne se présentant point sous la forme $\dfrac{1}{0}$. On a généralement

$$\phi(x)=\phi(a)+(x-a)\phi'(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^n}{1.2....n}\phi^n(a+\theta(x-a))$$

et l'on en déduit

$$f(a)=\frac{\phi(a)}{(x-a)^m}+\frac{\phi'(a)}{(x-a)^{m-1}}+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{n-m}}{1.2..n}\phi^n(a+\theta(x-a)).$$

Recherches relatives aux expressions qui se présentent directement ou indirectement sous la forme $\frac{0}{0}$.

37) Étant donné la relation générale

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x).\Delta x \qquad (1)$$

l'on remarque que pour toute valeur particulière de x satisfaisant à la condition $f(x)=0$, il vient

$$f(x+\Delta x)=f'(x+\theta\Delta x).\Delta x.$$

Soit $x=a$ l'une de ces valeurs. Si nous la substituons dans l'équation précédente et que nous posions ensuite $\Delta x=x-a$, nous aurons quelque soit x,

$$f(x)=f'(a+\theta(x-a)).(x-a) \qquad (2)$$

L'équation (2) subsistant alors même que $f'(a)$ se présenterait accidentellement sous la forme $\dfrac{1}{0}$, l'on conclut de ce qui précède le théorème suivant :

Toute fonction qui s'annule pour x=a *est en général le produit de deux facteurs. L'un de ces facteurs est* x—a, *l'autre se réduit à* f'(a), *lorsqu'on se place dans l'hypothèse particulière où la fonction s'annule.*

38) S'agit-il maintenant du rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$, supposé tel que, pour $x=a$, il se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, chacun de ces deux termes s'annulant dans cette hypothèse. L'annulation simultanée des fonctions $f(x)$, $F(x)$ dépend, *comme on vient de le voir*, de la présence du facteur commun $x-a$. Supprimons ce facteur et posons ensuite $x=a$, nous aurons d'après ce qui précède,

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}$$

si les dérivées s'annulaient encore toutes deux, on aurait de même

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}=\frac{f''(a)}{F''(a)}$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que, l'une des deux dérivées cessant de s'annuler, l'indétermination disparut.

Veut-on d'ailleurs procéder directement, on sait, conformément aux formules des N°s 33 et 34, que, si la valeur particulière $x=a$ annule la fonction et ses $(n-1)$ premières dérivées, il vient immédiatement

$$f(x)=\frac{(x-a)^n}{1.2...\,n}\,.\,f^n(a+\theta_1(x-a))$$

On a de même pour tout autre fonction remplissant les mêmes conditions

$$F(x)=\frac{(x-a)^n}{1.2...\,n}\,.\,F^n(a+\theta_2(x-a))$$

et par conséquent pour $x=a$

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f^n(a)}{F^n(a)}.$$

39) La proposition, que nous venons de démontrer, subsistant quel que soit a, il y a lieu d'examiner ce qui arrive lorsque l'annulation des fonctions que l'on considère répond, non plus à une valeur particulière de la variable, mais bien à l'expression symbolique $x=\infty$.

En ce cas les fonctions convergent vers zéro à mesure que x croit indéfiniment et il en est de même de toutes leurs dérivées (voir N° 28). Il semble donc que, si la formule du N° 38 était seule applicable, le symbole de l'indétermination ne pourrait jamais disparaitre.

Posons $x=\frac{1}{z-a}$ nous aurons $f(x)=f\left(\frac{1}{z-a}\right)=\phi(z)$, $F(x)=F\left(\frac{1}{z-a}\right)=\psi(z)$. et puisque par hypothèse ces fonctions convergent vers zéro en même temps que z converge vers a, il viendra nécessairement $\phi(a)=0$, $\psi(a)=0$. De là résulte

$$\frac{\phi(a)}{\psi(a)}=\frac{\phi'(a)}{\psi'(a)}$$

et cette valeur exprime la limite vers laquelle converge le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ à mesure que x croit indéfiniment.

Si les dérivées successives $\phi'(a)$, $\phi''(a)$, etc., $\psi'(a)$, $\psi''(a)$, etc. s'évanouissent jusqu'à celles de l'ordre n exclusivement (il a été démontré que toutes les dérivées d'une fonction ne peuvent jamais s'annuler à la fois pour une même valeur particulière atttribuée à la variable), on aurait de même

$$\frac{f(\infty)}{F(\infty)}=\frac{\phi(a)}{\psi(a)}=\frac{\phi^n(a)}{\psi^n(a)}.$$

Remarque. Des relations $f(x)=\phi(z)$, $F(x)=\psi(z)$ l'on déduit généralement

$$f'(x)dx=\phi'(z)dz$$
$$F'(x)dx=\psi'(z)dz.$$

et divisant membre à membre

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}=\frac{\phi'(z)}{\psi'(z)}.$$

Il suit de là que, si deux fonctions convergent vers zéro à mesure que la variable croit indéfiniment, le rapport de ces fonctions et celui de leurs dérivées premières convergent en même temps vers une *même limite* déterminée. Mais chacune de ces dérivées, prise isolément, converge alors vers zéro : le rapport des dérivées secondes a donc même limite que celui des dérivées premières et ainsi de suite à l'infini.

S'agit-il maintenant de la détermination de cette limite, nous venons de voir qu'il est toujours permis de substituer le rapport des dérivées d'un ordre quelconque à celui des fonctions primitives. Or la dérivation a généralement pour effet la mise en évidence du facteur qui s'annule haut et bas. On peut donc opérer directement sur les fonctions données et il n'est pas besoin de recourir à l'artifice de calcul indiqué ci-dessus. L'on a ainsi

$$\frac{f(x=\infty)}{F(x=\infty)}=\frac{0}{0}=\frac{f^{n}(x=\infty)}{F^{n}(x=\infty)}$$

l'hypothèse $x=\infty$ n'étant introduite dans l'expression générale du rapport $\frac{f^{n}(x)}{F^{n}(x)}$ qu'après la suppression du facteur qui en annule à la fois les deux termes.

40) Le symbole $\frac{\infty}{\infty}$ ne constitue en réalité qu'une représentation indirecte de la forme $\frac{0}{0}$. Néanmoins nous le considérerons en particulier.

Soit le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ supposé tel que pour $x=a$ il se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Si nous faisons $\phi(x)=\frac{1}{f(x)}$, $\psi(x)=\frac{1}{F(x)}$, les fonctions $\phi(x)$, $\psi(x)$ s'annulent toutes deux pour $x=a$ et il vient,

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\psi(x)}{\phi(x)}=\frac{\psi'(a+\theta(x-a))}{\phi'(a+\theta'(x-a))} \quad (1)$$

d'où

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{\psi'(a)}{\phi'(a)}$$

et si plusieurs des dérivées successives $\phi'(a)$, $\phi''(a)$, etc. $\psi'(a)$, $\psi''(a)$, etc., s'annulent, celles de l'ordre n étant les premières qui ne s'évanouissent pas toutes deux à la fois

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{\psi^{n}(a)}{\phi^{n}(a)}.$$

Observons que les relations $\phi(x)=\frac{1}{f(x)}$, $\psi(x)=\frac{1}{F(x)}$ donnent:

quelque soit x,

$$\phi'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(x)^2}$$

$$\psi'(x) = -\frac{F'(x)}{F'(x)^2}$$

et par suite

$$\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{f'(x)}{F'(x)} \cdot \left[\frac{F(x)}{f(x)}\right]^2$$

ou en vertu de l'équation (1)

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\phi'(x)}{\psi'(x)} \cdot \left[\frac{\psi'(a+\theta(x-a))}{\phi'(a+\theta'(x-a))}\right]^2 \qquad (2)$$

La comparaison des équations (1) et (2) fournit le principe suivant :

Lorsque deux fonctions croissent indéfiniment à mesure que la variable converge vers une valeur particulière, le rapport de ces fonctions et celui de leurs dérivées premières convergent en même temps vers une même limite. Mais d'ailleurs chacune de ces dérivées est alors indéfiniment croissante : le rapport des dérivées secondes a donc même limite que celui des dérivées premières et ainsi de suite à l'infini.

De là résulte

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{f'(a)}{F'(a} = \frac{f^n(a)}{F^n(a)}$$

Il semble qu'il y a cercle vicieux à exprimer la limite $\frac{f(a)}{F(a)}$ par le rapport de deux termes dont chacun, pris isolément, affecte la forme $\frac{1}{0}$. Mais ici, de même qu'au N° 39, l'hypothèse $x=a$ ne doit être introduite dans l'expression $\frac{f^n(x)}{F^n(x)}$ qu'après la suppression des facteurs communs mis en évidence par les dérivations successives. Il n'est donc pas nécessaire de recourir à la formule,

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{\psi^n(a)}{\phi^n(a)}$$

et l'on peut procéder directement comme nous venons de l'indiquer.

Nous avons supposé que la forme $\frac{\infty}{\infty}$, affectée par le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$, répondait à une valeur particulière $x=a$. Si l'hypothèse faite sur la variable était exprimée symboliquement par $x=\infty$, (la forme du rapport restant d'ailleurs la même) deux cas pourraient se présenter. Ou bien les dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, etc. $F'(x)$, $F''(x)$, etc. seraient toutes indéfiniment croissantes avec x et en ce cas tout ce qui précède resterait applicable. Ou bien elles n'affecteraient pas toutes la forme $\frac{1}{0}$ pour $x=\infty$, et en ce cas il faudrait s'arrêter à la première des dérivées qui prendrait une valeur finie.

41) Soit encore le produit $f(x)F(x)$.

Si dans une hypothèse particulière ce produit prend la forme $0\times\infty$, l'on remarque qu'on peut écrire en général

$$f(x)\,F(x)=\frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}.$$

Tout revient donc à considérer une expression de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ et l'on est ramené à l'un des cas traités précédemment.

Soit enfin l'exponentielle $f(x)^{F(x)}$ supposée telle que pour $x=a$ elle se présente sous l'une des formes 0^0, ∞^0, 1^∞ il vient généralement

$$f(x)=e^{\log.f(x)}.$$

et par conséquent

$$f(x)^{F(x)}=e^{Fx\log.f(x)}$$

La question se réduit donc à déterminer vers quelle limite converge le produit $F(x)\log.f(x)$ dans l'hypothèse où l'on s'est placé.

Développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières de l'accroissement de la variable.

APPLICATION AUX FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES.

42) Étant donné la formule du N° 33.

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\text{etc.}+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cdot f^{n-1}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}f^n(a+\theta(x-a)). \qquad (1)$$

Posons $x-a=h$, et après substitution remplaçons a par x. Nous trouvons ainsi

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x)+\text{etc.}+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cdot f^{n-1}(x)$$
$$+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x+\theta h). \qquad (2)$$

fait-on simplement $a=0$, il vient

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}\cdot f''(0)+\text{etc.}+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cdot f^{n-1}(0)$$
$$+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f(\theta x). \qquad (3)$$

Au lieu de limiter ces développements par l'addition du terme qui les complète, l'on peut concevoir qu'ils se prolongent à l'infini suivant la loi de formation indiquée. Les séries, que l'on obtient de cette manière sont généralement connues, l'une (2) sous le nom de série de Taylor, l'autre (3) sous celui de série de Maclaurin.

Il est permis en certains cas de substituer ces séries au développement limité de la fonction. Néanmoins on ne doit jamais perdre de vue qu'elles n'ont d'autre fondement que celui qui résulte de la possibilité présumée de prolonger toujours et suivant une loi constante le développement limité sur lequel elles reposent. Lorsque le terme complémentaire $\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n}f^n(a+\theta(x-a))$ décroit indéfini-

ment à mesure que n augmente, les séries sont convergentes et elles permettent de calculer, avec tel degré d'approximation que l'on veut, la valeur des fonctions qu'elles servent à développer. Dans le cas contraire, elles sont divergentes. Pour que les séries puissent subsister, il faut que nulle dérivée ne devienne infinie, ou discontinue à l'origine de l'intervalle que l'on considère. Ces conditions étant supposées remplies, les séries sont convergentes pour tout ou partie de cet intervalle.

43) Soit à développer $(x+h)^m$ par la série de Taylor. La fonction x^m a pour dérivée de l'ordre $n \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ \ldots\ n} x^{m-n}$. Cette expression restant en général finie quels que soient x et n, la série peut subsister. On a d'ailleurs pour terme complémentaire

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ \ldots\ n} h^n(x+\theta)h^{m-n}$$
$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ \ldots\ n}(x+\theta h)^m.\left(\frac{h}{x+\theta h}\right)^n$$

Or, si l'on suppose $x>h$, ce terme converge indéfiniment vers zéro à mesure que n augmente. La série subsiste donc dans cette hypothèse et l'on a

$$(x+h)^m=x^m+mhx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}.h^2x^{m-2}+\text{etc.}$$

On observera que, pour toute valeur entière et positive de l'exposant m, les dérivées s'annulent à partir de l'ordre $m+1$. En ce cas le développement est limité, et il vient quels que soient x et h

$$(x+h)^m=x^m+mhx^{m-1}+\text{etc.}+mxh^{m-1}+h^m \quad (1)$$

Développée de la même manière la fonction $\log(x+h)$ donne

$$\log.(x+h)=\log.x+\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}-\text{etc.}$$

Cette série subsiste comme la précédente pour toute valeur de x supérieure à h.

44) Soit maintenant la fonction a^x à développer par la série de

---

(1) La formule (2) du N° 30 conduit immédiatement à ce résultat.

Maclaurin : on a $f^n(0)=(\log. a)^n$ et pour terme complémentaire

$$f^n(\theta x)=a^{\theta x}\frac{(\log. a)^n(x-a)^n}{1.2\ldots n}=a^{\theta x}.\left[\frac{(x-a)\log. a}{1}\right]\left[\frac{(x-a)\log. a}{n}\right]$$

$$\ldots\ldots\left[\frac{(x-a)\log a}{n}\right]$$

ce terme convergeant vers zéro à mesure que n augmente indéfiniment, la série subsiste quelque soit x et l'on a toujours

$$a^x=1+x\log. a+\frac{x^2(\log. a)^2}{1.2}+\frac{x^3(\log. a)^3}{1.2.3}+\text{etc. (1)}$$

Posons $a=e$ base du système des logarithmes Népériens : il vient $\log. a=\log. e=1$ et par conséquent

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

ou faisant $x=1$

$$e=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Veut-on déterminer pour cette dernière formule les limites de l'erreur que l'on commet en s'arrêtant au terme du rang $n+1$, l'on remarque que les quantités désignées ci-dessus N° 33 par M et m sont les valeurs maxima et minima du rapport $\frac{f^n(x)-f^n(a)}{(x-a)^n}$ $=\frac{e_x-1}{x}$. La dérivée $\frac{d\frac{e^x-1}{x}}{dx}=\frac{1-(1-x)e^x}{x^2}$ restant toujours positive depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$ le rapport croit continuement

---

(1) La formule de Maclaurin n'est point applicable au développement de la fonction $a^{-\frac{1}{x}}$. On se rend compte de cette circonstance en observant que le symbole $a^{-\frac{1}{0}}$ exprime, non pas une valeur effective de la fonction $a^{-\frac{1}{x}}$, mais une limite que cette fonction ne peut jamais atteindre, bien qu'elle y tende indéfiniment à mesure que x converge vers zéro. Il y a donc solution de continuité, et il importe d'en faire la remarque, car autrement le fait que nous venons de signaler serait inexplicable.

dans cet intervalle. De là résulte

$$1^\circ \text{ pour } x=1 \qquad M=e-1$$

$$2^\circ \text{ pour } x=0 \qquad m=\frac{d(e^x-1)}{dx}=1$$

La différence entre ces deux expressions est $e-2$, il vient donc

$$e>2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.}+\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}$$

$$e<2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.}+\frac{1}{1.2\ldots n}+\frac{e-2}{1.2\ldots n}$$

c'est-à-dire

$$e<2+\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.}+\frac{1}{1.2\ldots n}\right]\frac{1.2\ldots\ n}{(1.2\ldots n)-1}$$

En faisant le calcul on trouve

$$e=2,718282\ldots$$

Les mêmes considérations s'appliquent au développement en série des fonctions $\sin x$, $\cos x$. Bornons-nous à présenter le résultat.

$$\text{Sin}\, x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2..5}-\text{etc.}$$

$$\text{Cos}\, x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.34}-\text{etc.}$$

Ces séries subsistent comme la précédente indépendamment de toute valeur particulière attribuée à la variable.

45) Soit en dernier lieu une fonction de plusieurs variables

$$u=F(x,y,z,\ldots\ldots)$$

Pour ramener ce cas aux précédents il suffit de suivre la marche tracée N° 21 et 23 et de considérer chacune des variables x, y, z, etc. comme fonction d'une même variable indépendante liée aux premières par telles relations qu'on jugera à propos d'établir.

Prenons par exemple la fonction

$$z=F(x,y).$$

Si nous posons

$$x=\phi(t)$$
$$y=\psi(t)$$

il vient

$$z=f(t)$$

et développant par la série de Taylor

$$f(t+i)=f(t)+if'(t)+\frac{i^2}{1.2}f''(t)+\text{etc.}+\frac{i^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(t)$$
$$+\frac{i^n}{1.2\ldots n}f^n(t+\theta i)$$

c'est-à-dire en désignant par h et k les accroissements $\Delta x=\phi(t+i)-\phi(t)$, $\Delta y=\psi(t+i)-\psi(t)$

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+if'(t)+\frac{i^2}{1\cdot 2}f''(t)+\text{etc.}$$

D'un autre côté l'on a généralement

$$f'(t)=\frac{dz}{\Delta x}\phi'(t)+\frac{dz}{\Delta y}\psi'(t)$$

$$f''(t)=\frac{d^2z}{\Delta x^2}\phi'(t)^2+2\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}\phi'(t)\psi'(t)+\frac{d^2z}{\Delta y^2}\psi'(t)^2$$
$$+\frac{dz}{\Delta x}\phi''(t)+\frac{dz}{\Delta y}\psi''(t)$$

et ainsi de suite.

Suppose-t-on, pour plus de simplicité, que les relations arbitraires $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ sont de la forme

$$x=at+m$$
$$y=bt+n$$

il en résulte

$$\phi'(t)=a=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{h}{i},\qquad \phi''(t)=0$$
$$\psi'(t)=b=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{k}{i},\qquad \psi''(t)=0$$

et substituant,

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+\frac{dz}{\Delta x}h+\frac{dz}{\Delta y}k+\frac{d^2z}{\Delta x^2}\frac{h^2}{1\cdot 2}+\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}hk$$
$$+\frac{d^2z}{\Delta y^2}\frac{k^2}{1\cdot 2}+\text{etc.}$$

On voit d'ailleurs que la série est ou non convergente suivant que le terme complémentaire $\frac{i^n}{1.2\ldots n} f^n(t+\theta i)$ converge ou non vers zéro à mesure que n augmente.

Si pour les valeurs particulières attribuées aux variables x, y, les dérivées partielles $\frac{dz}{\Delta x}, \frac{dz}{\Delta y}, \frac{d^2z}{\Delta x^2}, \frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}, \frac{d^2z}{\Delta y^2}$, etc., s'évanouissaient toutes à la fois jusqu'à celles de l'ordre n exclusivement, il viendrait

$$F(x+h,y+k)-F(x,y)=\frac{i^n}{1\cdot 2\cdots n}f^n(t+\theta i).$$

Cette formule comprend la théorie des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

Relation générale existant entre l'accroissement effectif de la fonction et ses accroissements différentiels de tous les ordres.

46) Désignons par $\Delta_r x$ la partie de l'intervalle $\Delta_{r-1} x$ à laquelle répond la valeur moyenne de la dérivée $f^r(x)$. Nous aurons, conformément au N° 29,

$$\Delta y = \Delta x \cdot f'(x) + \Delta x \cdot \Delta_1 x \cdot f''(x) + \Delta x \cdot \Delta_1 x \Delta_2 x \cdot f'''(x) + \text{etc.}$$

ou substituant aux fonctions dérivées les accroissements différentiels des ordres correspondants.

$$\Delta y = dy + \frac{\Delta_1 x}{\Delta x} \cdot d^2 y + \frac{\Delta_1 x, \Delta_2 x}{\Delta x^2} \cdot d^3 y + \text{etc.}$$

Soient d'ailleurs représentées par z_1, z_2, z_3, etc., les fractions $\frac{\Delta_1 x}{\Delta x_1}, \frac{\Delta_2 x}{\Delta x}, \frac{\Delta_3 x}{\Delta x}$, etc., lesquelles forment une suite indéfiniment décroissante, il viendra

$$\Delta y = dy + z_1 d^2 y + z_1 z_2 d^3 y + z_1 z_2 z_3 d^4 y + \text{etc.}$$

En partant de cette formule et suivant les procédés de calcul du N° 30 on trouve en général

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{1.2.} + \frac{d^3 y}{1.2.3.} + \text{etc.}$$

Sous cette forme sont comprises les séries de Taylor et de Maclaurin, les variables engagées dans la fonction pouvant d'ailleurs être en nombre quelconque.

Lorsque la loi de génération de l'ordre n est constante, et que l'accroissement effectif Δy dépend exclusivement de cette loi, (la valeur particulière attribuée à la fonction rendant nuls les accroissements différentiels des ordres inférieurs) l'on trouve immédiatement (voir N° 30).

$$\Delta y = \frac{d^n y}{1.2\ldots n}$$

A notre point de vue, ce principe suffit pour que l'on puisse en conclure généralement, et sans autre intermédiaire que l'application directe de notre conception fondamentale,

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{1.2} + \frac{d^3 y}{1.2.3} + \text{etc.}$$

La série ne peut d'ailleurs être en défaut que s'il y a discontinuité.

Suppose-t-on que l'un quelconque des accroissements différentiels, prenne accidentellement la forme symbolique $\frac{1}{0}$. Cette circonstance indique que l'accroissement dont il s'agit n'est susceptible d'aucune détermination. On conçoit dès lors l'impossibilité de poursuivre le développement sans le modifier.

Maxima et minima des fonctions d'une ou plusieurs variables.

47) Toute valeur particulière d'une fonction est dite *minima* lorsque la fonction *supposée continuement variable*, ne peut changer sans commencer par croître. Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque la valeur de la fonction ne peut changer sans qu'il y ait d'abord décroissance, cette valeur est dite *maxima.*

Nous avons vu qu'une fonction quelconque peut toujours être considérée comme fonction d'une seule variable indépendante. Dès lors les principes des N°s 25 et 29 montrent suffisamment quel est en général le procédé à suivre pour déterminer les valeurs de la variable susceptibles de rendre la fonction maxima ou minima. Ce procédé consiste à chercher les valeurs particulières qui annulent la dérivée du premier ordre, puis à les substituer dans les

dérivées successives, en s'arrêtant pour chacune de ces valeurs à la première des dérivées qu'elle ne fait pas évanouir. On sait d'ailleurs comment le rang et le signe de cette dérivée indiquent la marche de la fonction à partir de la valeur que l'on considère.

Soit pour exemple une fonction de deux variables,

$$z=F(x,y)$$

En opérant comme au N° 45 on doit poser

$$f'(t)=\frac{dz}{\Delta x}\phi'(t)+\frac{dz}{\Delta y}\psi'(t)=0$$

Or il faut que cette relation subsiste indépendamment de toute détermination des fonctions arbitraires, $\phi(t)$, $\psi(t)$. Il en résulte donc

$$\frac{dz}{\Delta x}=0, \qquad \frac{dz}{\Delta y}=0. \qquad (1)$$

Les valeurs de x et y qui satisfont à la fois à ces deux équations devant être substituées dans les dérivées successives $f''(t)$, $f'''(t)$, etc., il vient d'abord.

$$f''(t)=\frac{d^2z}{\Delta x^2}\cdot\phi''(t)^2+2\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}\phi'(t)\psi'(t)+\frac{d^2z}{\Delta y^2}\psi'(t)^2.$$

Observons que la dérivée seconde $f''(t)$ se présente ici sous une forme particulière. Cette forme est précisément celle qu'elle affecte en général, lorsque disposant jusqu'à un certain point des fonctions $\phi(t)$, $\psi(t)$, on les suppose toutes deux linéaires. La même simplification se reproduirait pour la dérivée troisième $f'''(t)$, si les valeurs déduites des équations de condition (1), annulaient les dérivées partielles $\frac{d^2z}{\Delta x^2}$, $\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}$, $\frac{d^2z}{\Delta y^2}$, et ainsi de suite pour toutes les dérivées successives.

Cela posé, l'on voit qu'en ce qui concerne les substitutions à faire dans la suite de ces dérivées, il est permis de supprimer d'avance les termes où figurent les coefficients différentiels $\phi''(t)$, $\psi''(t)$, $\phi'''(t)$, $\psi'''(t)$, etc. Si la suppression est permise, en même temps que la substitution devient nécessaire, c'est parce que chacun de ces coefficients se trouve affecté d'un facteur qui s'évanouit et non parce qu'*on dispose en aucune façon*, des fonctions *arbitraires* $\phi(t)$, $\psi(t)$. On arrive, au même résultat, lorsqu'on traite

à priori les dérivées $\phi'(t)$, $\psi'(t)$ comme des quantités constantes, et tel est le point de vue auquel on se place habituellement. Mais procéder ainsi c'est dépouiller la solution de la généralité qu'elle comporte. Il paraît donc préférable de suivre la marche que nous venons d'indiquer.

Nous nous écarterions de notre but si nous insistions davantage sur la question des maxima et minima. Observons toutefois que la circonstance, qui rend maxima ou minima une valeur de la fonction, consiste *essentiellement* dans le changement de signe subi par la fonction dérivée. En général la dérivée est continue et dès lors elle ne peut changer de signe qu'en s'évanouissant. Il en est autrement, lorsqu'il y a discontinuité. On conçoit donc qu'il ne faut pas s'arrêter exclusivement à la solution

$$f'(t)=0$$

Il convient aussi d'écrire

$$\frac{1}{f'(t)}=0$$

et de voir, pour toute valeur finie qui satisferait à cette équation, si elle correspond, ou non, à un changement de signe de la dérivée.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Principes fondamentaux.

48) 1° La différentielle n'est qu'*une différence ordinaire*, prise dans une certaine hypothèse. Elle exprime ce que devient l'accroissement de la fonction, lorsque, considérant la loi qui en régit la génération initiale, l'on suppose que cette loi se développe en demeurant permanente.

2° Soit, un mode quelconque de génération, et une grandeur représentée numériquement par c.

Si, pour *toute* valeur *constante* affectée par cette grandeur, l'on a

$$\Delta y = c\Delta x.$$

Il en résulte *immédiatement* et *avec plus de généralité*,

$$dy = cdx$$

le mode de génération restant le même, et la grandeur c pouvant être ou *constante* ou bien *continuement variable*, dans l'intervalle que l'on considère.

Tangentes et plan tangent.

49) La tangente à une courbe, en un point donné, est la droite qui fixe, pour ce point, la direction suivant laquelle il y a continuité sur la courbe.

Deux lignes se touchent lorsqu'elles ont, en un point commun, même direction tangentielle.

Le système des axes coordonnés étant rectangulaire ou oblique, soit d'abord une courbe plane,

$$y = f(x)$$

L'équation différentielle

$$dy = f'(x_0)dx$$

est, *en différences ordinaires*, l'équation d'une ligne qui touche

la courbe $y=f(x)$ au point x_0, y_0. Cela résulte de ce qu'en supposant permanente la loi de génération des grandeurs $\Delta y, \Delta x$, l'on n'altère point la direction suivant laquelle la continuité s'établit à l'origine de ces accroissements.

Considérant cette ligne, et substituant aux différentielles les différences qu'elles expriment, il vient

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

c'est-à-dire l'équation d'une droite. La ligne, dont il s'agit, est donc la tangente elle-même.

Soit ensuite une courbe quelconque dans l'espace

$$x=\phi(z), \qquad y=\psi(z)$$

les mêmes considérations donnent pour les équations de la tangente au point x_0, y_0, z_0,

$$dx=\phi'(z_0)dz, \qquad dy=\psi'(z_0)dz$$

c'est-à-dire

$$x-x_0=\phi'(z_0)(z-z_0), \qquad y-y_0=\psi'(z_0)(z-z_0).$$

Tout accroissement effectif, pris par rapport à la tangente est accroissement différentiel par rapport à la courbe. Si donc on désigne par s la longueur d'un arc mesuré sur la courbe et par α, β, γ les angles que la tangente fait avec les axes coordonnés, *supposés rectangulaires*, il vient en vertu des propriétés de la droite

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$\text{Cos}\,\alpha=\frac{dx}{ds}$$

$$\text{Cos}\,\beta=\frac{dy}{ds}$$

$$\text{Cos}\,\gamma=\frac{dz}{ds}$$

Les résultats, que nous venons d'obtenir, s'établissent, avec une égale facilité, lorsqu'on se fonde sur le principe (2) du N° 48.

En effet, toute courbe pouvant être considérée comme engendrée par le mouvement d'un point dans l'espace, il y a lieu d'observer qu'un élément variable concourt à cette génération. C'est, pour chaque position du point générateur, la direction suivant laquelle le déplacement commence. Supposons d'abord cette direction quel-

conque, mais constante ; la ligne engendrée est droite et l'on a

$$\Delta x = \Delta s \cdot \cos\alpha, \quad \Delta y = \Delta s \cdot \cos\beta, \quad \Delta z = \Delta s \cdot \cos\gamma.$$

Suppose-t-on maintenant la direction continuement variable d'une position à une autre, il suffit de changer la caractéristique. Il vient donc en ce cas

$$dx = ds \cdot \cos\alpha, \quad dy = ds \cdot \cos\beta, \quad dz = ds \cdot \cos\gamma.$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

50) Soit une surface,

$$u = F(x, y, z,) = 0.$$

et sur cette surface un point quelconque x_0, y_0, z_0. Il est un lieu géométrique déterminé par l'ensemble infini des directions suivant lesquelles à partir de ce point il y a continuité sur la surface. Quelque soit ce lieu, il reste le même, lorsque, supposant permanente la loi de génération des grandeurs $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, l'on substitue à la surface donnée celle qui a pour équation,

$$\frac{du_0}{\Delta x_0} dx + \frac{du_0}{\Delta y_0} dy + \frac{du_0}{\Delta z_0} dz = 0$$

c'est-à-dire

$$(x - x_0)\frac{du_0}{\Delta x_0} + (y - y_0)\frac{du_0}{\Delta y_0} + (z - z_0)\frac{du_0}{\Delta z_0} = 0$$

Or cette équation appartient à un plan. Elle exprime donc le lieu géométrique lui-même. On le nomme plan tangent.

Considérons tant de courbes qu'on voudra, tracées sur la surface et passant par le point de contact du plan tangent. A partir de ce point la continuité s'établit, pour chaque courbe, suivant la direction fournie par la tangente. Lieu géométrique de ces directions, le plan tangent contient toutes les tangentes. (1)

---

(1) Etant donné un point sur une droite, imaginons que ce point se déplace suivant une direction quelconque, *normale* à la droite. Pris à son origine, le déplacement dont il s'agit peut toujours être considéré comme s'effectuant, *par rotation*, autour d'un point, choisi comme on voudra sur la droite donnée. On a donc

$$d[(x-t)^2 + (y-u)^2 + (z-v)^2] = 0$$

x, y, z étant les coordonnées du point mobile et t, u, v, celles du centre de rotation, *supposé fixe*.

Courbure et rayon de courbure dans les courbes planes.

51) Lorsque la continuité s'établit sur une courbe, c'est suivant une direction déterminée pour chaque point. Si la direction persistait d'un point à un autre, la ligne serait droite. En général la direction ne persiste pas et elle varie avec continuité. De là nait la courbure. On voit ainsi comment la courbure résulte des modifications continues subies par la direction tangentielle.

Soit ω l'angle qu'une tangente à la courbe $y=f(x)$, fait avec l'axe des abcisses : l'on a

$$\omega=\text{arc. tang.}\, f'(x).$$

et différenciant

$$d\omega=\frac{f''(x)}{1+f'(x)^2}dx$$

ou remplaçant dx par sa valeur $\frac{ds}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$

$$d\omega=\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}ds \qquad (1)$$

Cela posé, si l'on rend permanente à partir du point x_0, y_0, la loi qui régit la génération simultanée des accroissements angulaires et arcuels, l'on n'altère pas la courbure en ce point. Or, dans cette hypothèse, les différentielles ne sont plus que des différences ordinaires. Il vient donc pour équation de la ligne qui résulte du développement continu de la loi de génération, supposée permanente à partir du point x_0, y_0,

$$\Delta\omega=\frac{f''(x_0)}{[1+f'(x_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\Delta s.$$

S'agit-il d'ailleurs du lieu géométrique déterminé par l'ensemble des points susceptibles d'être pris pour centres de rotation, il vient immédiatement,

$$(t-x)dx+(u-y)dy+(v-z)dz=0$$

t, u, v étant les coordonnées courantes.

De là, les équations des normales et plans normaux.

ou posant
$$\rho_0=\frac{[1+f'(x_0)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}$$
$$\Delta s=\rho_0\Delta\omega.$$

La ligne représentée par cette équation est évidemment une circonférence de cercle ayant ρ_0 pour rayon. Elle a en tous ses points même courbure et cette courbure est celle de la courbe donnée au point x_0, y_0.

Le cercle ainsi déterminé prend, par rapport à la courbe, et pour le point que l'on considère, le nom de cercle osculateur. Le rayon de ce cercle a pour expression générale,
$$\rho=\frac{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$
On le nomme rayon de courbure.

52) On voit d'après ce qui précède que le changement de direction, *pris à son origine*, s'effectue sur la courbe de la même manière qu'en un point quelconque du cercle osculateur. On voit également que, si plusieurs courbes ont en un point commun même tangente, et que les dérivées du second ordre affectent même valeur particulière, ces courbes ont en ce point même courbure. Cette dernière conséquence peut s'établir directement et à priori. Il est clair en effet que, pour une même valeur attribuée à la direction tangentielle, le changement, que cette direction subit à l'origine des accroissements, reste le même, soit que l'on considère la courbe $y=f(x)$, soit qu'on lui substitue la ligne qui a pour équation
$$df'(x)=f''(x_0)\cdot dx\cdot=c\cdot dx.$$

Il suit de là, qu'étant donné l'équation générale du cercle
$$(x-t)^2+(y-u)^2=\rho^2$$
et par suite les équations différentielles
$$x-t+(y-u)\frac{dy}{\Delta x}=0 \qquad (1)$$
$$1+\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)^2+(y-u)\frac{d^2y}{\Delta x^2}=0 \qquad (2)$$
si l'on veut que ce cercle soit osculateur à la courbe $y=f(x)$ au point x_0, y_0, il suffit de poser dans ces trois équations; $y=y_0$, $x=x_0$, $\frac{dy}{\Delta x}=f'(x_0)$, $\frac{d^2y}{\Delta x^2}=f''(x_0)$. En opérant de cette ma-

nière, on retombe sur l'expression déjà trouvée pour le rayon de courbure. On a d'ailleurs pour les coordonnées du centre, (1)

$$u=y_0+\frac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)}, \quad t=x_0-\frac{f'(x_0)(1+f'(x_0)^2)}{f''(x_0)}$$

Enveloppes et développées planes.

53) Soit l'équation

$$y=ax-\phi(a). \tag{1}$$

dans laquelle le paramètre a est supposé continuement variable. A chaque valeur affectée par ce paramètre répond une droite déterminée. Considérons l'une quelconque de ces droites, la droite (1) par exemple, et *prenant à son origine* le déplacement qu'elle subit lorsqu'on fait varier a, imaginons que ce déplacement *soit continué* suivant le mode particulier qui le régit *alors qu'il commence.* Cela revient à *supposer permanente* la loi de génération des grandeurs Δa, $\Delta\phi(a)$. Si donc il s'agit, *dans cette hypothèse*, d'une seconde position *quelconque* de la droite mobile c'est en substituant aux différences Δa, $\Delta\phi(a)$ les différentielles da, $d\phi(a)$, qu'on obtiendra l'équation de la droite dans cette position. Il vient ainsi,

$$y=ax-\phi(a)+[x-\phi'(a)]da. \tag{2}$$

Cela posé, quelle que soit celle des droites représentées par l'équation (2) que l'on veuille considérer, il est visible qu'elle coupe la droite (1) en un point qui reste toujours le même et dont les coordonnées sont respectivement

$$x=\phi'(a) \tag{3}$$
$$y=a\phi'(a)-\phi(a) \tag{4}$$

c'est donc, *en tournant autour de ce point* que *commence* le déplacement de la droite (1). Chaque position de cette droite fournit ainsi un centre de rotation. Le lieu de ces centres est en général

(1) Interprétées *directement et à priori*, les équations (1) et (2) expriment, l'une, que le point (t,u) est pris sur la normale, l'autre, que ce point reste *fixe*, lorsque le changement de direction tangentielle est *continué* d'après le mode qui le régit *alors qu'il commence.*

une courbe. On en obtient l'équation en éliminant a entre les relations (3) et (4).

La courbe, dont il s'agit, étant représentée par l'équation (4) dans laquelle a est une fonction de x déterminée par la relation (3), l'on a en différenciant,

$$dx=\varphi''(a)da$$
$$dy=a\varphi''(a)da$$

De là résulte pour l'équation de la tangente au point (3)(4)

$$dy=adx$$

c'est-à-dire

$$y-a\varphi'(a)+\varphi(a)=a(x-\varphi'(a))$$

ou réduisant

$$y=ax-\varphi(a).$$

Cette tangente n'est donc autre chose que la droite (1) elle même.

Il suit de là que chacune des droites représentées par l'équation (1). touche le lieu des centres. Par ce motif, on donne en général à ce lieu le nom d'*enveloppe*.

L'équation (1) exprimant un système quelconque de droites assujetties à une loi de succession continue, supposons, comme cas particulier, que ce système soit celui des normales à la courbe $y=f(x)$. En ce cas, le changement de direction, *pris à son origine*, s'effectue sur la courbe de la même manière que sur le cercle osculateur. C'est donc en tournant autour du centre de ce cercle que *commence* le déplacement de chaque normale, et l'*enveloppe* des normales est le lieu des centres de courbure.

Veut-on vérifier par le calcul la déduction précédente, l'on doit poser

$$a=-\frac{1}{f'(x)}, \qquad \varphi(a)=-\frac{x}{f'(x)}-y$$

d'où différenciant,

$$\frac{dx}{da}=\frac{f'(x)^2}{f''(x)}.$$
$$\varphi'(a)=x-\frac{f'(x)(1+f'(x))}{f''(x)}$$

et par suite

$$a\Phi'(a)-\Phi(a)=y+\frac{1+f'(x)^2}{f''(x)}$$

Les valeurs, que l'on obtient ainsi pour $\Phi'(a)$ et $a\Phi'(a)-\Phi(a)$, coincident avec celles que nous avons trouvées N° 52 pour les coordonnées du centre de courbure. Il est donc vérifié que le lieu de ces centres est l'enveloppe des normales.

54) Reprenons les équations du N° 52.

$$(x-t)^2+(y-u)^2=\rho^2 \qquad (1)$$

$$(x-t)\ +(y-u)f'(x)=0 \qquad (2)$$

$$1+f'(x)^2+(y-u)f''(x)=0 \qquad (3)$$

et rappelons nous qu'il suffit d'attribuer aux variables, x, y, les valeurs qu'elles affectent en un point quelconque de la courbe $y=f(x)$, pour qu'en ce point le cercle osculateur se trouve déterminé, 1° par son rayon ρ; 2° par les coordonnées de son centre u et t.

Les équations (1) (2) (3) subsistant avec cette même signification pour tous les points de la courbe $y=f(x)$, l'on peut les considérer indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux variables x, y. En ce cas, les quantités ρ, t, u, sont fonction de ces variables et si l'on différencie les équations (1) et (2), il vient, eu égard aux réductions que les équations (2) et (3) permettent d'effectuer :

$$(x-t)dt+(y-u)du=\rho d\rho \qquad (4)$$

$$dt+f'(x)\cdot du=0. \qquad (5)$$

L'équation (5) exprime que la tangente au lieu des centres de courbure est normale à la courbe donnée. Soit ω l'angle que cette tangente fait avec l'axe des abscisses, on a

$$\frac{x-t}{\rho}=\cos\omega=\frac{dt}{d\sigma}$$

$$\frac{y-u}{\rho}=\sin\omega=\frac{du}{d\sigma}$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (4).

$$d\sigma=d\rho.$$

La loi qui régit la génération simultanée des différences $\Delta\sigma$, $\Delta\rho$ est constante : il vient donc aussi

$$\Delta\sigma=\Delta\rho$$

Ce résultat montre qu'une courbe quelconque peut être décrite par l'extrémité d'un fil inextensible, qui serait enroulé sur le lieu des centres de courbure et qu'on développerait progressivement. De là le nom de *développée* par lequel on exprime plus particulièrement l'*enveloppe* des normales et celui de *développante* donnée à la courbe par raison de réciprocité.

Détermination du mode suivant lequel commence *en général* (1) *tout déplacement d'une droite ou d'un plan.*

(GÉNÉRATION DES SURFACES RÉGLÉES, GAUCHES OU DÉVELOPPABLES).

55) Soit les équations générales

$$\left.\begin{aligned} x&=az+h \\ y&=bz+i \end{aligned}\right\} (1).$$

dans lesquelles les quantités a, b, h, i sont fonction d'une même variable η. A chaque valeur affectée par η répond dans l'espace une droite déterminée. Considérons l'une quelconque de ces droites, la droite (1), par exemple, et prenant à son origine le déplacement qu'elle subit lorsqu'on fait varier η, imaginons que ce déplacement *persiste* suivant le mode particulier qui le régit *alors qu'il commence.* Cela revient à supposer permanente la loi de génération des grandeurs Δa, Δb, Δh, Δi. Si donc il s'agit *dans cette hypothèse*, d'une seconde position quelconque de la droite mobile, c'est en substituant à ces différences, les différentielles da, db, dh, di, qu'on obtiendra les équations de la droite dans cette position. Il vient ainsi

$$\left.\begin{aligned} x&=az+h+zda+dh \\ y&=bz+i+zdb+di \end{aligned}\right\} (2)$$

(1) Nous laissons de côté le cas où le déplacement s'effectue sans qu'il y ait changement de direction.

La comparaison des équations (1), (2) donne lieu aux remarques suivantes :

1° Lorsque l'on a

$$\frac{dh}{da}=\frac{di}{db} \qquad (3)$$

la droite (1) est coupé en un seul et même point par chacune des droites représentées en nombre infini par les équations (2). Ce point a pour ordonnée

$$z=-\frac{dh}{da}=-\frac{di}{db}.$$

2° Suppose-t-on

$$\frac{dh}{da} \gtrless \frac{di}{db}$$

les droites (1), (2) ne se rencontrent pas.

3° Étant donné le plan

$$Ax+By+Cz=k$$

dont la direction se trouve complètement fixée par les équations de condition

$$\left.\begin{array}{l} Aa+Bb+C=0 \\ Ada+Bdb=0. \end{array}\right\} (4).$$

les droites (2) sont toutes ainsi que la droite (1) parallèles à ce plan.

Il suit de là qu'à l'origine de tout déplacement la droite (1) peut subir deux conditions différentes, *les rapports* $\frac{dh}{da}, \frac{di}{db}$ *affectant ou non la même valeur particulière.*

Dans le premier cas, le déplacement s'effectue suivant un seul et même plan déterminé. Dans le second cas, la droite s'écarte de ce plan, en lui demeurant parallèle.

La droite (1), considérée dans l'ensemble infini des positions qu'elle peut prendre, a pour lieu géométrique une surface réglée. Si la condition (3) est remplie indépendamment de toute valeur attribuée à la variable η, il n'existe pour tous les points situés sur une même génératrice rectiligne qu'un seul et même plan tangent, et la surface est dite *développable*. Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, la surface est gauche.

56) Soit l'équation

$$Ax + By + Cz = k. \qquad (1)$$

dans laquelle les quantités A, B, C, k, sont fonction d'une même variable η. A chaque valeur attribuée à cette variable répond dans l'espace un plan déterminé. Considérons l'un quelconque de ces plans, le plan (1) par exemple, et prenant à son origine le déplacement qu'il subit lorsqu'on fait varier η, imaginons que ce déplacement *soit continué* suivant le mode particulier qui le régit *alors qu'il commence.* Cela revient à supposer permanente la loi de génération des grandeurs ΔA, ΔB, ΔC, Δk. Si donc il s'agit, *dans cette hypothèse* d'une seconde position quelconque du plan mobile, c'est en substituant à ces différences les différentielles dA, dB, dC, dk, qu'on obtiendra l'équation du plan dans cette position. On trouve ainsi

$$Ax + By + Cz + xdA + ydB + zdC = k + dk. \qquad (2)$$

Cela posé, quelque soit celui des plans représentés par l'équation (2) que l'on veuille considérer, il est visible qu'il coupe le plan (1) suivant une droite qui reste constamment la même et qui a pour équations générales

$$Ax + By + Cz = k \qquad (3)$$

$$xdA + ydB + zdC = dk. \qquad (4)$$

C'est donc en tournant autour de cette droite que commence le déplacement du plan (1). Chaque position de ce plan fournit ainsi un axe de rotation. Le lieu de ces axes est une surface dont l'équation s'obtient en éliminant η entre les relations (3) et (4).

La surface, dont il s'agit, étant représentée par l'équation (3) dans laquelle η est une fonction de x, y, z, déterminée par la relation (4), la différenciation donne pour équation du plan tangent à cette surface

$$Adx + Bdy + Cdz = 0.$$

c'est-à-dire

$$A(t - x) + B(u - y) + C(v - z) = 0$$

Or si le point (x, y, z) est pris sur la droite (3), (4), cette équation devient

$$At + Bu + Cv = k.$$

C'est donc suivant le plan (1) que la continuité s'établit sur la surface pour chacun des points de la génératrice rectiligne située dans ce plan.

Tel est le mode de génération et le caractère distinctif des surfaces développables.

57) Reprenons les équations de la génératrice

$$Ax+By+Cz=k.$$
$$xdA+ydB+zdC=dk.$$

Si nous appliquons les considérations du N° 55 et que nous nous proposions de déterminer le point autour duquel s'effectue par rotation le déplacement initial de cette génératrice, il suffit de joindre aux équations précédentes la relation

$$xd^2A+yd^2B+zd^2C=d^2k.$$

L'ensemble de ces trois équations représente l'enveloppe des génératrices rectilignes, laquelle prend, par rapport à la surface développable, le nom d'*arête de rebroussement*.

58) Soit $z=F(x,y)$ l'équation d'une surface développable. Posons pour simplifier $p=\frac{dz}{\Delta x}, q=\frac{dz}{\Delta y}, r=\frac{d^2z}{\Delta x^2}, s=\frac{d^2z}{\Delta x\Delta y}, t=\frac{d^2z}{\Delta y^2}$.

Le plan tangent

$$dz=pdx+qdy$$

reste le même le long d'une génératrice. On a donc *pour tous les points* situés sur une même génératrice quelconque,

$$p=\text{Cons}^{\text{te}}., \qquad q=\text{Cons}^{\text{te}}.$$

et par suite

$$dp=rdx+sdy=0$$
$$dq=sdx+tdy=0.$$

De là résulte :

1° Pour équation d'une génératrice quelconque projetée dans le plan des xy, ou ce qui revient au même, pour équation différentielle de la projection de l'arête de rebroussement

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{r}{s}=-\frac{s}{t}.$$

2° Pour équation de condition, caractérisant toute surface développable

$$rt-s^2=0.$$

Courbes à double courbure.

PLAN OSCULATEUR.

59) Considérons comme application particulière de la théorie exposée au N° 55 le système des tangentes à la courbe

$$x=\phi(z), \qquad y=\psi(z).$$

Si l'on désigne par t, u, v, les coordonnées courantes et par x, y, z celles du point de contact, il vient pour équations générales d'une tangente quelconque

$$t=v\frac{dx}{dz}+x-z\frac{dx}{dz}$$
$$u=v\frac{dy}{dz}+y-z\frac{dy}{dz}$$

L'on doit poser en conséquence

$$a=\frac{dx}{dz}, \qquad h=x-z\frac{dx}{dz}, \qquad b=\frac{dy}{dz}, \qquad i=y-z\frac{dy}{dz}.$$

d'où différenciant

$$da=d\cdot\frac{dx}{dz}, \quad dh=-z\cdot d\cdot\frac{dx}{dz}, \quad db=d\cdot\frac{dy}{dz}, \quad di=-zd\cdot\frac{dy}{dz}.$$

On a donc en ce cas,

$$\frac{dh}{da}=\frac{di}{db}=-z.$$

De là résultent les principes suivants :

1° *C'est par rotation autour de son point de contact que commence le déplacement de la tangente.*

2° *Pris à son origine, et continué suivant le mode qui le régit alors qu'il commence, le changement de direction tangentielle s'effectue suivant un plan déterminé.*

3° Le lieu géométrique des tangentes est une surface développable. Ajoutons, comme conséquences subsidiaires, que, dans le

développement de cette surface, la courbe donnée conserve en chaque point sa courbure et que toute trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes a, pour développée, l'enveloppe de ces génératrices, c'est-à-dire la courbe que l'on considère.

Cela posé l'on nomme *plan osculateur* le plan suivant lequel commence le changement de direction tangentielle.

Soit

$$A(t-x)+B(u-y)+C(v-z)=0$$

l'équation de ce plan. On a pour fixer sa direction les équations de condition (4) du N° 55. Il vient donc,

$$Adx+Bdy+Cdz=0$$
$$Ad\cdot\frac{dx}{dz}+Bd\cdot\frac{dy}{dz}=0.$$

ces relations donnent

$$\frac{A}{B}=-\frac{d\cdot\frac{dy}{dz}}{d\cdot\frac{dx}{dz}},\quad \frac{C}{B}=-\frac{dy}{dz}+\frac{dx}{dz}\,\frac{d\cdot\frac{dy}{dz}}{d\cdot\frac{dx}{dz}}$$

d'où substituant dans l'équation du plan osculateur et réduisant

$$(t-x)(dzd^2y-dyd^2z)+(u-y)(dxd^2z-dzd^2x)$$
$$+(v-z)(dyd^2x-dxd^2y)=0.$$

On arrive directement au même résultat lorsqu'étant donné trois points qui ont pour coordonnées respectives

Le 1er. $\left\{\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\}$, le 2me. $\left\{\begin{matrix}x+dx\\y+dy\\z+dz\end{matrix}\right\}$, le 3me. $\left\{\begin{matrix}x+2dx+d^2x\\y+2dy+d^2y\\z+2dz+d^2z\end{matrix}\right\}$

ou plus généralement

Le 1er. $\left\{\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\}$, le 2me. $\left\{\begin{matrix}x+mdx\\y+mdy\\z+mdz\end{matrix}\right\}$, le 3me. $\left\{\begin{matrix}x+ndx+pd^2x\\y+ndy+pd^2y\\z+ndz+pd^2z\end{matrix}\right\}$

l'on assujettit un plan à contenir ces trois points.

En effet l'on a d'abord

$$A(t-x)+B(u-y)+C(v-z)=0$$

il vient ensuite

$$Adx+Bdy+Cdz=0 \qquad (1)$$
$$Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=0 \qquad (2)$$

et l'élimination conduit à la même équation finale.

Lorsqu'on opère ainsi, voici quelle est en réalité le sens du procédé qu'on employe.

Le premier point est sur la courbe, le second sur la tangente, le troisième dans le plan osculateur. La position de ces points est *d'ailleurs* tout-à-fait arbitraire et leurs distances *si petites* ou *si grandes* qu'on voudra.

Cette explication donnée, l'on observera qu'il est plus simple de poser immédiatement les équations (1) et (2) sans recourir à la considération auxiliaire des trois points. En effet l'équation (1), prise isolément, exprime que le plan est parallèle à la tangente, et, combinée avec l'équation (2). qu'il ne cesse pas de lui être parallèle lorsque le changement de direction persiste suivant le mode qui le régit à son origine.

68) La normale située dans le plan osculateur est dite normale principale. Pour obtenir ses équations, il suffit de joindre à l'équation du plan osculateur, celle du plan normal.

$$(t-x)dx+(u-y)dy+(v-z)dz=0$$

Veut-on d'ailleurs ramener ces équations à la forme ordinaire on trouve par leur combinaison

$$t-x=\frac{d\cdot\frac{dx}{ds}}{d\cdot\frac{dz}{ds}}(v-z)=\frac{dsd^2x-dxd^2s}{dsd^2z-dzd^2s}(v-z)$$

$$u-y=\frac{d\cdot\frac{dy}{ds}}{d\cdot\frac{dz}{ds}}(v-z)=\frac{dsd^2y-dyd^2s}{dsd^2z-dzd^2s}(v-z)$$

Soit $\lambda,, \mu, \nu,$ les angles que la normale principale fait avec les axes coordonnés, on a d'abord

$$\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2=\frac{1}{ds^2}\left[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2\right]$$

et par suite

$$\text{Cos}\,\lambda = \frac{ds\ d\cdot\dfrac{dx}{ds}}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)-(d^2s)^2}},$$

$$\text{Cos}\,\mu = \frac{ds\cdot d\cdot\dfrac{dy}{ds}}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}},$$

$$\text{Cos}\,\nu = \frac{ds\cdot d\cdot\dfrac{dz}{ds}}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}$$

61) Les principes établis N° 56 montrent suffisamment que c'est en commençant par tourner autour de la tangente que le plan osculateur se déplace sur la courbe. On peut d'ailleurs vérifier cette déduction en observant que les équations (3) et (4) du N° 56 deviennent en ce cas,

$$(t-x)(dzd^2y-dyd^2z)+(u-y)(dxd^2z-dzd^2x)$$
$$+(v-z)(dyd^2x-dxd^2y)=0.$$
$$(t-x)(dzd^3y-dyd^3z)+(u-y)(dxd^3z-dzd^3x)$$
$$+(v-z)(dyd^3x-dxd^3y)=0$$

et sont toutes deux satisfaites, lorsque l'on y pose : $t=x+dx$, $u=y+dy$, $v=z+dz$.

Il suit de là que la surface, lieu géométrique des diverses positions successivement affectées par la normale principale, est en général une surface gauche. Pour qu'il en fut autrement, il faudrait que le plan osculateur demeurat invariable. Cette dernière circonstance ne peut se présenter que dans les courbes planes, alors que l'on a

1° $$d\cdot\frac{dxd^2z-dzd^2x}{dzd^2y-dya^2z}=0$$

2° $$d\cdot\frac{dyd^2z-dzd^2y}{dzu^2y-dyd^2z}=0$$

3° $$d\left[x+y\frac{dxd^2z-dzd^2y}{dzd^2y-dyd^2z}+z\frac{dyd^2x-dxd^2y}{dzd^2y-dyd^2z}\right]=0$$

ou plus simplement, et ce qui revient au même

$$dz[d^2xd^3y-d^2yd^3x]+dy[d^2zd^3x-d^2xd^3z]+dx[d^2yd^3z-d^2zd^3y]=0.$$

Rayons de 1re et 2me courbure.

62) Pris à son origine, le changement de direction tangentielle s'effectue dans le plan osculateur. De là résulte une première courbure. D'un autre côté, si la courbe n'est point plane, il y a déplacement continu du plan osculateur et c'est par rotation autour de la tangente que ce plan change incessamment de direction dans l'espace. De là, une sorte de torsion nommée deuxième courbure. Cette deuxième courbure peut, ainsi que la première demeurer constante, ou bien varier d'un point à un autre. Dans tous les cas si l'on représente par $\Delta\omega'$ l'angle de deux plans osculateurs qui correspondent respectivement aux deux tangentes dont l'angle est $\Delta\omega$, il est évident que, la première courbure étant mesurée par le rapport $\frac{d\omega}{ds}=\frac{1}{\rho}$, la deuxième pourra l'être par le rapport $\frac{d\omega'}{ds}=\frac{1}{\rho'}$. On observera seulement que dans ce cas les accroissements différentiels $d\omega$, $d\omega'$ sont pris nécessairement à partir des valeurs particulières $\omega=0$, $\omega'=0$.

Lorsque les deux courbures sont constantes en chaque point, la courbe est telle que deux arcs quelconques égaux en longueur sont toujours superposables. Cette condition suffit pour fixer la nature de la ligne dont il s'agit. En effet, ce ne peut être qu'une hélice, offrant comme cas extrêmes le cercle et la droite.

Cherchons l'expression générale des rayons ρ, ρ', de première et deuxième courbure.

Soit ω l'angle de deux droites, l'une fixe et faisant avec les axes coordonnées les angles α, β, γ; l'autre de direction variable et faisant avec les mêmes axes les angles α', β', γ'. L'on a

$$\operatorname{Cos}\omega=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'.$$

d'où différenciant

$$d\omega=-\frac{\cos\alpha.d\cos\alpha'+\cos\beta.d\cos\beta'+\cos\gamma.d\cos\gamma'}{\sin\omega}.$$

Le changement de direction que l'on considère devant être pris à son origine, c'est-à-dire lorsque commence la génération de l'angle ω, l'on doit poser dans cette équation,

$$\alpha'=\alpha, \qquad \beta'=\beta, \qquad \gamma'=\gamma. \qquad \omega=0.$$

mais il vient alors

$$d\omega = \frac{0}{0}$$

Il faut donc appliquer la règle du N° 38. On trouve ainsi

$$(d\omega)^2 = -[\cos\alpha . d^2\cos\alpha + \cos\beta . d^2\cos\beta + \cos\gamma . d^2\cos\gamma]$$

On a d'ailleurs

$$\cos\alpha . d\cos\alpha + \cos\beta . d\cos\beta + \cos\gamma . d\cos\gamma = 0$$

d'où résulte

$$\cos\alpha . d^2\cos\alpha + \cos\beta . d^2\cos\beta + \cos\gamma . d^2\cos\gamma$$
$$= -[(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2]$$

il vient donc aussi et plus simplement,

$$(d\omega)^2 = (d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2 \qquad (1)$$

Pour passer de ce cas à celui où la direction de la droite est fixée soit par ses projections,

$$t - x = \frac{a}{c}(v - z)$$
$$u - y = \frac{b}{c}(v - z)$$

soit par l'équation du plan normal,

$$a(t-x) + b(u-y) + c(v-z) = 0.$$

il suffit de poser

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Ce qui donne immédiatement,

$$(d\omega)^2 = \frac{(da)^2+(db)^2+(dc)^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{(ada+bdb+cdc)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

et après réduction,

$$(d\omega) = \frac{(adb-bda)^2+(adc-cda)^2+(bdc-cdb)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \qquad (2).$$

Les formules (1) et (2) permettent de résoudre aisément la question proposée.

S'agit-il d'abord du rayon ρ de première courbure, on posera $\cos\alpha=\frac{dx}{ds}$, $\cos\beta=\frac{dy}{ds}$, $\cos\gamma=\frac{dz}{ds}$, ou bien $a=dx$, $b=dy$, $c=dz$. Il vient ainsi

$$\rho=\frac{ds}{d\omega}=\frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}$$

$$=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}$$

ou faisant usage de la formule (2)

$$\rho=\frac{ds}{d\omega}=\frac{ds^3}{\sqrt{(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2}}$$

S'agit-il ensuite du rayon ρ' de deuxième courbure : on fera,

$$a=dyd^2z-dzd^2y,\quad b=dzd^2x-dxd^2z,\quad c=dxd^2y-dyd^2x$$

et observant que l'on a,

$$\begin{aligned} adb-bda&=-dz[ad^2x+bd^2y+cd^2z]\\ cda-adc&=-dy[ad^2x+bd^2y+cd^2z]\\ bdc-cdb&=-dx[ad^2x+bd^2y+cd^2z]\end{aligned}$$

il vient

$$\rho'=\frac{ds}{d\omega'}$$

$$=\frac{[dyd^2z-dzd^2y]^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+[dxd^2y-dyd^2x]^2}{d^2x[dyd^2z-dzd^2y]+d^2y[dzd^2x-dxd^2z]+d^2z[dxd^2y-dyd^2x]}$$

63) Soit, comme au N° 60, λ, μ, ν, les angles que la normale principale fait avec les axes coordonnés, et t, u, v, les coordonnées du centre de première courbure, l'on a

$$t-x=\rho\cos\mu=\frac{ds^3}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}\cdot d.\frac{dx}{ds}.$$

$$u-y=\rho\cos\mu=\frac{ds^3}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)}\; d.\frac{dy}{ds}.$$

$$v-z=\rho\cos v=\frac{ds^3}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}\; d.\frac{dz}{ds}.$$

Les mêmes résultats peuvent s'obtenir, soit en partant de l'équation générale du cercle et opérant comme au N° 52, soit en considérant la surface enveloppe des plans normaux. Cette surface est développable et sa génératrice rectiligne a pour équations,

$$(t-x)dx+(u-y)dy+(v-z)dz=0 \qquad (1)$$
$$(t-x)d^2x+(u-y)d^2y+(v-z)d^2z=0. \qquad (2)$$

L'expression

$$[d^2x(dyd^2z-dzd^2y)+d^2y[dzd^2x-dxd^2z)+d^2z(dxd^2y-dyd^2x)]$$

étant identiquement nulle, le plan (2) est, ainsi que le plan (1), normal au plan osculateur. La même condition subsiste donc pour la droite (1) (2). Or c'est en commençant par tourner autour de cette droite que le plan normal se déplace sur la courbe. Le centre de 1re courbure se trouve donc au point d'intersection de la droite dont il s'agit avec le plan osculateur.

Si l'on observe que tout plan normal touche la surface enveloppe le long de la génératrice sur laquelle est situé le centre de courbure, l'on peut en conclure immédiatement que la tangente au lieu de ces centres est contenue, pour chaque centre, dans le plan normal correspondant. Cette tangente est donc perpendiculaire à la courbe donnée. Elle ne doit pas être confondue avec la normale principale. Celle-ci est dans le plan osculateur : l'autre s'en écarte généralement.

Détermination directe des rayons de 1re et 2me courbure dans l'hélice.

64) Soit (fig. 2) une hélice tracée sur un cylindre droit à base circulaire, R le rayon du cylindre, et μ la tangente de l'angle que la touchante à la courbe fait avec le plan de la section droite.

Prenons sur cette hélice un point quelconque *m*. Le plan mené par la touchante *ma* et par la droite *mf* normale au cylindre est le plan osculateur de l'hélice au point *m*. Cela résulte de la position symétrique que les deux branches de la courbe affectent de chaque côté de ce point par rapport au plan dont il s'agit. On voit d'ailleurs que dans la génération de l'hélice, le plan tangent *map* commençant par tourner autour de la droite *mp*, la continuité s'établit pour le point *a* suivant la droite *ac* normale à ce plan.

Cela posé, considérons les angles que tendent à décrire respectivement les droites *ma*, *pa*, lorsque la rotation commence autour

de l'axe *mp*, et supposons permanente la loi qui régit cette génération, prise à son origine. En ce cas, les angles dont il s'agit sont inversement proportionnels aux longueurs *ma*, *pa*. Si donc on désigne le premier par $d\omega$, le second par dt, l'on a évidemment

$$\frac{dt}{d\omega}=\frac{ma}{pa}=\sqrt{1+\mu^2}$$

Mais dt n'est autre chose que l'angle de deux plans tangents au cylindre et comprenant entr'eux un arc d'hélice égal à ds. L'on a donc aussi

$$\frac{ds}{dt}=\mathrm{R}\sqrt{1+\mu^2}$$

et il vient en substituant

$$\frac{ds}{d\omega}=\rho=\mathrm{R}(1+\mu^2).\ (1)$$

Le rayon de première courbure étant ainsi déterminé, l'on remarque que la droite *mb*, menée dans le plan tangent *map* perpendiculairement à *ma*, est normal au plan osculateur. On a donc de même

$$\frac{dt}{d\omega'}=\frac{mb}{pb}=\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}$$

---

(1) Le centre du cercle osculateur se trouve sur le prolongement de la normale *mf*, à une distance de l'axe *of* représentée par $\rho-\mathrm{R}=\mathrm{R}\mu^2$. Le lieu de ces centres est donc une hélice concentrique à l'hélice donnée, de même pas, et pour laquelle, en nommant μ' la tangente de son inclinaison sur le plan de la section droite, il vient

$$\mu'(\rho-\mathrm{R})=\mu\mathrm{R}$$

de là résulte

$$\mu\mu'=1$$

Les touchantes situées aux deux extrémités de la normale *mn* sont à angle droit l'une sur l'autre. On voit en outre que les deux hélices ont même courbure dans leurs plans osculateurs respectifs et qu'elles sont en quelque sorte réciproques l'une de l'autre. En effet le rayon de première courbure est pour la seconde hélice

$$(\rho-\mathrm{R})(1+\mu'^2)=\mathrm{R}\mu^2\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)=\mathrm{R}(1+\mu^2)=\rho$$

Chacune de ces deux hélices est donc pour l'autre le lieu des centres de première courbure.

et par conséquent pour rayon de deuxième courbure

$$\frac{ds}{d\omega'}=\rho'=\frac{R(1+\mu^2)}{\mu}=\frac{\rho}{\mu} \quad (1)$$

Delà résulte

$$\mu=\frac{\rho}{\rho'}$$

$$R=\frac{\rho}{1+\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2}$$

On peut donc se donner arbitrairement les deux rayons de courbure ρ, ρ' et déterminer d'après ces conditions les éléments μ et R.

Il suit de là que, quels que soient en un point donné d'une courbe quelconque les deux modes particuliers suivant lesquels commencent les changements de direction de la tangente et du plan osculateur, il existe toujours une hélice pour laquelle les mêmes changements s'effectuent en chaque point suivant ce même mode, devenu permanent. On voit en outre qu'en disposant convenablement cette hélice, on peut toujours identifier sa double courbure constante avec celle de la courbe donnée au point que l'on considère. L'hélice ainsi déterminée prend par rapport à la courbe le nom d'*hélice osculatrice*. Elle est, *pour les courbes à double courbure, ce que le cercle osculateur est pour les courbes planes.*

---

(1) Remarquons que pour la seconde hélice on aurait dans les mêmes circonstances

$$\rho''=\frac{\rho}{\mu'}=\mu\rho$$

et par suite

$$\rho^2=\rho'\rho''.$$

Le rayon de première courbure de chacune de ces deux hélices est donc moyenne proportionnelle entre leurs rayons de deuxième courbure.

Dans le cas particulier où l'on pose $\mu=1$ l'inclinaison de l'hélice sur son axe étant de 45°, l'on trouve

$$\rho=\rho'=\rho''=2R.$$

Les deux hélices sont alors tracées sur le même cylindre. La 1re et la 2me courbure sont égales. Leur rayon est double de celui de la section droite.

Courbure des surfaces.

---

65) Soit une surface,

$$z=\mathrm{F}(x,y)$$

Pour abréger, nous représenterons par p et q les dérivées partielles du premier ordre $\frac{dz}{\Delta x}$, $\frac{dz}{\Delta y}$ et par r, s, t, les dérivées partielles du second ordre $\frac{d^2z}{\Delta^2 x}$, $\frac{d^2z}{\Delta x \Delta y}$, $\frac{d^2z}{\Delta y^2}$.

Soit un point de la surface. En ce point, où nous supposons l'origine des coordonnées transportée, le plan tangent a pour équation

$$dz-pdx-qdy=0 \qquad (1)$$

et, eu égard à la direction de ce plan, la courbure d'une section quelconque se trouve complétement déterminée par l'équation différentielle,

$$d^2z-pd^2x-qd^2y=rdx^2+2sdxdy+tdy^2 \qquad (2)$$

Considérons le cercle osculateur à l'une de ces sections, pour le point dont il s'agit, et, quel qu'il soit, concevons le tracé sur la sphère

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2 \qquad (3)$$

Par hypothèse la sphère passe par l'origine, et l'on peut l'assujettir à toucher en ce point la surface donnée. On a donc d'abord

$$\rho^2=a^2+b^2+c^2$$

puis différenciant l'équation (3)

$$(x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz=0 \qquad (4)$$

et posant $x=0$, $y=0$, $z=0$

$$adx+bdy+cdz=0$$

Delà résulte

$$\frac{a}{c}=-p, \qquad \frac{b}{c}=-q$$

et par conséquent,

$$\rho=c\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Veut-on maintenant que pour les sections faites par un même plan, l'une sur la surface donnée, l'autre sur la sphère, le point de contact devienne un point d'osculation, il faut exprimer qu'en ce qui concerne respectivement chacune de ces deux sections, la loi de courbure est, en ce point, la même pour les deux surfaces.

Différencions en conséquence l'équation (4) et posons $x=0$, $y=0$, $z=0$, dans le résultat de la différenciation. Il vient ainsi,

$$ad^2x+bd^2y+cd^2z=dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$$

ou remplaçant a et b par leurs valeurs

$$d^2z-pd^2x-qd^2y=\frac{ds^2}{c} \qquad (5)$$

Observons que si le plan sécant est déterminé, l'on peut considérer les quantités ds, dx, dy, dz comme l'étant aussi. Donc alors pour faire coincider les équations de courbure (2) et (5), il suffit d'écrire,

$$\frac{ds^2}{c}=rdx^2+2sdxdy+tdy^2 \qquad (6)$$

et l'on en déduit immédiatement

$$\rho=\frac{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{rdx^2+2sdxdy+tdy^2} \qquad (7)$$

Cela posé, s'il s'agit d'une section normale, la section qui lui répond dans la sphère est un grand cercle et elle a pour rayon de courbure le rayon ρ de la sphère. S'agit-il au contraire d'une section oblique, la section correspondante est un petit cercle. Néanmoins la sphère, sur lequel ce cercle est tracé, ne change pas si les quantités $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ restent les mêmes, c'est-à-dire si la section oblique a même tangente que la section normale. Or en ce cas désignant par ε l'angle des deux sections et par R le rayon du petit, cercle, on a évidemment

$$R=\rho\cos\varepsilon \qquad (8)$$

Donc, pour toute section normale le rayon de courbure est fourni par l'équation (7), et, pour toute section oblique ayant même tangente, par l'équation (8).

Il suit delà que la courbure en un point donné d'une surface se

trouve complétement déterminée par la courbure des sections normales.

66) De l'équation (7) l'on déduit

$$rdx^2+2sdxdy+tdy^2=\frac{ds^2}{\rho}\sqrt{1+p^2+q^2}$$

c'est-à-dire,

$$rx^2+2sxy+ty^2=\frac{\sigma^2}{\rho}\sqrt{1+p^2+q^2}$$

σ étant une longueur quelconque, mesurée à partir de l'origine suivant la tangente à la section normale que l'on considère, et x, y, les coordonnées du point suivant lequel l'extrémité de cette longueur se projète dans le plan des x, y.

Le rayon vecteur σ étant tout-à-fait arbitraire on peut le supposer tel que pour chaque section normale on ait constamment

$$\sigma^2=\rho.$$

Dans cette hypothèse l'extrémité du rayon vecteur σ reste sur une certaine courbe, située dans le plan tangent et ayant pour projection

$$rx^2+2sxy+ty^2=\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

La courbe déterminée par cette équation et celle du plan tangent a reçu le nom d'*indicatrice* (1). Elle est remarquable en ce que le carré de chacun de ses demi-diamètres fournit le rayon de courbure de la section normale correspondante.

La considération de l'indicatrice conduit aux déductions suivantes :

1° En général les rayons de courbure sont susceptibles d'un maximum et d'un minimum, les plans normaux correspondants étant rectangulaires.

---

(1) En général on pose $\sigma^2=2\rho\delta$ et l'on a pour projection de l'indicatrice,

$$rx^2+2sxy+ty^2=2\delta\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Voici d'ailleurs ce qu'est l'indicatrice. Au point donné sur la surface il existe une infinité de paraboloïdes osculateurs. Si l'on considère en particulier celui de ces paraboloïdes dont l'axe principal est parallèle à la droite choisie pour axe des z, l'indicatrice est l'intersection de ce paraboloïde par un plan mené parallèlement au plan tangent, à une distance égale à δ. De là résulte un mode de génération applicable à tous les paraboloïdes osculateurs.

2° La somme inverse des rayons de courbure appartenant à deux sections normales quelconques rectangulaires, est constante.

3° La courbure d'une section quelconque est déterminée par celles qu'affectent les sections de plus petite et de plus grande courbure.

4° Les directions de plus petite et de plus grande courbure sont les seules suivant lesquelles la normale puisse en se déplaçant engendrer une surface développable. (1)

67) Supposons le plan des xy parallèle au plan tangent. Il vient en ce cas $p=0$, $q=0$, et l'on a pour équation de l'indicatrice

$$rx^2+2sxy+ty^2=1$$

Choisit-on les axes de manière à ce que cette courbe soit rapportée à ses diamètres principaux, il vient en outre $s=0$.

Cela posé, si l'on fait $p=0$, $q=0$, $s=0$ dans l'expression (7) du N° 65 l'on trouve pour le rayon de courbure d'une section normale quelconque

$$\rho=\frac{dx^2+dy^2}{rdx^2+tdy^2}$$

ou désignant par ϕ l'angle que la tangente à la section que l'on considère fait avec l'axe des x

$$\rho=\frac{1}{r\cos^2\phi+t\sin^2\phi}$$

Les rayons de plus petite et de plus grande courbure sont nommés *rayons de courbure principaux*, les sections qui leur répondent *sections normales principales*.

Soit ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure principaux, l'on déduit de l'équation précédente en y faisant successivement $\phi=0$ et $\phi=\frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{\rho_1}=r, \qquad \frac{1}{\rho_2}=t.$$

En général

$$\frac{1}{\rho}=r\cos^2\phi+t\sin^2\phi$$

(1) Cette propriété doit être démontrée. Nous ne la présentons ici que comme une induction fondée sur le résultat qu'on obtient, lorsqu'on substitue à chaque section normale son cercle osculateur, et à la surface donnée le lieu de ces cercles.

et pour une section normale à angle droit sur la précédente

$$\frac{1}{\rho'}=r\sin^2\phi+t\cos^2\phi$$

il vient donc

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=r+t=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}.$$

68) Quels que soient les axes coordonnés, supposés rectangulaires, l'on a généralement

$$\rho=\frac{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{rdx^2+2sdxdy+tdy^2}$$
$$=\frac{(p^2+1)dx^2+2pqdxdy+(q^2+1)dy^2}{rdx^2+2sdxdy+tdy^2}\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Considérant $\frac{dy}{dx}$ comme variable, différenciant et égalant à zéro le résultat de la différenciation, l'on trouve pour équation de condition relative aux deux sections normales principales

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}$$
$$-(1+p^2)s+pqr=0 \qquad (1)$$

D'un autre côté la normale au point x, y, z, a pour équations

$$t=x-p(v-z)$$
$$u=y-q(v-z)$$

si l'on veut que dans ses déplacements successifs elle engendre une surface développable il faut que l'on ait (voir N° 55)

$$\frac{dp}{dq}=\frac{d(x+pz)}{d(y+qz)}$$

Effectuant les calculs et substituant à dz, dp, dq leurs valeurs respectives $pdx+qdy$, $rdx+sdy$, $sdx+tdy$ l'on retombe précisément sur l'équation de condition précédente. Il est ainsi démontré que c'est en suivant les directions de plus petite et de plus grande courbure, *et celles-là seulement*, que la normale peut engendrer une surface développable. La suite continue de ces directions forme sur la surface donnée un réseau de lignes qui se coupent à angle droit et prennent le nom de *lignes de courbure*. Les projections de

de ces lignes sur le plan des x,y ont pour équation différentielle

$$\frac{dp}{dq}=\frac{d(x+pz)}{d(y+qz)}$$

ou plus simplement

$$dp(dy+qdz)=dq(dx+pdz)$$

69) Reprenons l'équation 6 du N° (65) et développons le terme ds^2 en y remplaçant dz par $pdx+qdy$. Il vient,

$$(p^2+1)dx^2+2pqdxdy+(q^2+1)dy^2=c[rdx^2+2sdxdy+tdy^2]$$

La valeur que l'on trouve ainsi pour c varie en général avec le rapport $\frac{dy}{dx}$. Si l'on voulait qu'elle demeurat constante indépendamment de toute valeur attribuée à ce rapport, il faudrait que l'on eut

$$p^2+1=rc, \qquad pq=sc, \qquad (q^2+1)=tc$$

et par suite

$$\frac{p^2+1}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{q^2+1}{t}.$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la courbure reste la même dans toutes les sections normales. Le point ainsi déterminé prend le nom d'*ombilic*.

On arrive au même résultat en partant de l'équation (1) du N° 68 et exprimant qu'elle subsiste quelque soit $\frac{dy}{dx}$.

Rectifications, quadratures, cubatures.



INDICATIONS PRÉLIMINAIRES.

70) Étant donné la fonction continue

$$y=f(x) \tag{1}$$

l'on a en même temps

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \tag{2}$$



et la différenciation consiste à déduire de l'équation (2) l'équation différentielle

$$dy = f'(x)dx \qquad (3)$$

L'opération inverse prend le nom d'*intégration*. Elle devient nécessaire lorsque la mise en équation du problème à résoudre fournit directement l'équation (3) et que l'objet que l'on se propose est la détermination de l'équation (2). Le signe d'intégration est $\int$, ou plutôt $\int_x^{x+\Delta x}$, les indices x et $x+\Delta x$ fixant les limites de l'intervalle que l'on considère. Le résultat qu'on obtient en intégrant est nommé *intégrale*. Il a pour valeur correspondante la différence Δy. On écrit ainsi,

$$\Delta y = \int_x^{x+\Delta x} f'(x)\cdot\Delta x. \qquad (4)$$

les équations (2), (3), (4) s'impliquant l'une l'autre et le signe $\int_x^{x+\Delta x}$ indiquant l'opération qui reste à effectuer dans l'équation (4) pour passer de l'équation (3) à l'équation (2).

On observera que si l'équation (2) résulte nécessairement de l'équation (1), la réciproque n'est pas également vraie. Concevons en effet que l'équation (2) subsiste seule et qu'après y avoir fait $x=a$ l'on remplace Δx par $x-a$; il vient

$$\Delta y = f(x) - f(a) \qquad (5)$$

ou désignant par b la valeur que prend y pour $x=a$

$$y = f(x) + b - f(a) \qquad (6)$$

Or quelle que soit la constante $b - f(a) = c$, l'équation (6) peut toujours se résoudre en l'une ou l'autre des équations (2) et (5). Celles-ci répondent donc en général à la relation

$$y = f(x) + \text{Cons}^{\text{te}}.$$

Pour ne pas nous écarter de notre but, nous laisserons de côté l'intégration proprement dite et, supposant résolu tout problème que nous aurons ramené à une question de calcul intégral, nous aborderons directement une nouvelle série d'applications géométriques.

Rectifications.

71) Soit s l'arc d'une courbe et x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point pris comme on voudra sur la courbe. Imaginons qu'à partir de ce point la continuité *persiste* suivant la direction fournie par la tangente. L'on a dans cette hypothèse,

$$\Delta s = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{\Delta z}\right)^2+\left(\frac{dy}{\Delta z}\right)^2}\cdot\Delta z. \qquad (1)$$

L'équation (1) subsiste quelle que soit la direction tangentielle, pourvu qu'elle demeure *constante* à partir du point et dans l'intervalle que l'on considère. Il vient donc pour le cas où cette direction *varie continuement*,

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{\Delta z}\right)^2+\left(\frac{dy}{\Delta z}\right)^2}\cdot dz.$$

et par suite

$$\Delta s = \int_z^{z+\Delta z} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{\Delta z}\right)^2+\left(\frac{dy}{\Delta z}\right)^2}\, .dz.$$

Quadratures.

1° AIRES PLANES.

---

72) Étant donné une aire plane, A l'on peut toujours la considérer comme engendrée par une portion de droite qui se déplace en changeant de grandeur. Pour plus de simplicité nous admettrons que les déplacements de la génératrice s'effectuent, soit parallèlement à une direction constante, soit par rotation autour d'un point fixe.

Dans le premier cas, prenons pour axes coordonnés deux droites rectangulaires, et pour directrice, l'axe des y par exemple. Soit d'ailleurs z la longueur de la génératrice. Si l'on suppose qu'à partir d'une position quelconque déterminée, la longueur z demeure

invariable, on a pour la génération qui répond à cette hypothèse,

$$\Delta A = z\Delta x.$$

De là résulte pour le cas général ou la grandeur z varie avec continuité dans l'intervalle Δx

$$dA = zdx$$

et par conséquent

$$\Delta A = \int_x^{x+\Delta x} zdx.$$

Autrement. L'on a en général,

$$\Delta A = (z + \mu\Delta x)\Delta x$$

μ étant une fraction. Il vient donc, comme ci-dessus,

$$dA = zdx.$$

Autrement. Considérons le triangle formé par la génératrice z et par les deux tangentes aux courbes qui la limitent. Soit, pour une position quelconque de la génératrice, T la surface de ce triangle. Le mode de génération restant le même, on a évidemment

$$dT = dA.$$

Or, si l'on désigne par x la hauteur du triangle, il vient

$$T = \tfrac{1}{2} zx = \tfrac{1}{2} mx^2$$

m étant une constante. On a donc

$$dA = dT = mx \cdot dx = zdx.$$

Dans le second cas, le point fixe étant pris à l'intérieur, nommons r la partie de la génératrice comprise entre ce point et le périmètre. Si la longueur r demeurait constante, à partir d'une position quelconque de la génératrice, la surface engendrée dans l'intervalle angulaire $\Delta\omega$ aurait pour mesure

$$\Delta A = \tfrac{1}{2} r^2 \Delta\omega.$$

Il suit delà que le rayon vecteur ne peut être continuement variable sans qu'il n'en résulte nécessairement,

$$dA = \tfrac{1}{2} r^2 d\omega$$

et par suite

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}\int_\omega^{\omega+\Delta\omega} r^2 d\omega.$$

Autrement. L'on a en général

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}\,[r^2 + \mu(2r\Delta r + \Delta r^2)]\Delta\omega.$$

μ étant une fraction. Il vient donc comme ci-dessus

$$dA = \tfrac{1}{2}\,r^2 d\omega.$$

Autrement. Soit o (fig. 3) le centre de rotation, $om = r$ une position quelconque du rayon vecteur, ba la tangente en m au périmètre courbe nmt, et s l'arc nm compris dans l'angle $nom = \omega$. Si, du point o, l'on abaisse sur la tangente la perpendiculaire $oa = p$, il vient

$$dA = \tfrac{1}{2}p \cdot ds. \qquad (1)$$

En général, la tangente étant substituée à la courbe, et α exprimant l'angle aom, il suffit de poser $d\alpha = d\omega$, pour qu'il en résulte immédiatement,

$$ds = d(ma) = d(p\,\text{tang.}\,\alpha) = \frac{p}{\cos^2\alpha}d\omega.$$

on a donc en substituant

$$dA = \tfrac{1}{2}\frac{p^2}{\cos^2\alpha}\,d\omega = \tfrac{1}{2}\,r^2 d\omega.$$

Si la courbe nmt était une circonférence de cercle ayant O pour centre, on aurait $p = r = \text{cons}^{\text{te}}$. En ce cas la relation (1) suffit et l'on en déduit directement

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}r\Delta s = \tfrac{1}{2}r^2\Delta\omega.$$

Remarque. A étant la surface d'un secteur circulaire ayant r pour rayon et répondant à l'angle au centre ω, l'on a

$$A = \tfrac{1}{2}\,r^2\omega.$$

d'où, traitant ω comme une constante et différenciant

$$dA = r\omega \cdot dr = s \cdot dr.$$

L'équation différentielle $dA = sdr$ exprime que l'aire engendrée par un arc de cercle qui se déplace en conservant même centre et même longueur a pour mesure le produit de l'arc par l'accroissement du rayon.

Aires de révolution.

73) Soit une surface A décrite par une courbe plane qui tourne autour de l'axe des x et a pour équation $y=f(x)$.

Etant pris sur la courbe un point quelconque (x,y), imaginons qu'à partir de ce point, la continuité *persiste* suivant la direction tangentielle. La courbe se trouvant ainsi continuée par une droite, imaginons en outre que chacun des points de la tangente soit assujetti à décrire une ligne précisément égale à la circonférence $2\pi y$.

La surface engendrée dans cette double hypothèse a pour mesure

$$\Delta A = 2\pi y\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot\Delta x.$$

Suppose-t-on maintenant que le produit $y\sqrt{1+f'(x)^2}$ soit continuement variable avec x dans l'intervalle Δx, il vient immédiatement

$$dA = 2\pi y\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx$$

et l'on en déduit, pour le cas général que nous avons en vue,

$$\Delta A = 2\pi\int_x^{x+\Delta x} y\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx.$$

Autrement. La section que l'on considère étant déterminée par la valeur attribuée à la variable, ce n'est point altérer la loi de génération des grandeurs ΔA, Δx que de substituer à la surface donnée le cône qui l'enveloppe suivant cette section. Mais s'il s'agit de ce cône, l'on a (1)

$$dA = 2\pi y\sqrt{1+f'(x)}\cdot dx$$

(1) En général z étant fonction continue de la variable indépendante x, si Δx change de signe et non de grandeur, il en est de même de l'accroissement différentiel dz. De là résulte le principe suivant :

Considéré en lui-même et mesuré directement entre les deux extrémités d'un intervalle quelconque égal à Δx, *l'accroissement différentiel de la fonction ne change pas de grandeur absolue, soit que,* conformément à la méthode ordinaire, *l'intervalle dont il s'agit se trouve porté* tout entier en deçà ou au-delà *de la valeur particulière attribuée à la variable indépendante*, *soit* qu'au contraire *il se compose de deux parties quelconques portées*, l'une en deça, l'autre au-delà *de cette même valeur.*

La même équation subsiste donc pour la surface donnée.

Autrement. Soit ω l'angle de deux plans méridiens, l'un fixe, l'autre de position variable. Imaginons qu'un cylindre droit soit circonscrit à l'une des deux sections méridiennes et limité par le plan de l'autre. Soit d'ailleurs A' la surface cylindrique ainsi déterminée. On a d'abord et à partir de $\omega=0$,

$$dA'=dA=\Delta A=C.\Delta\omega.$$

C étant une constante. L'on a ensuite et généralement,

$$A'=\text{tang}.\omega.\int_x^{x+\Delta x} y\sqrt{1+f'(x)^2}.dx.$$

d'où

$$dA'=\frac{\Delta\omega}{\cos^2\omega}\int_x^{x+\Delta x} y\sqrt{1+f'(x)^2}.dx$$

et par conséquent pour $\omega=0$

$$\Delta A=dA'=\Delta\omega\int_x^{x+\Delta x} y\sqrt{1+f'(x)^2}.dx.$$

Dans le cas particulier de la sphère, si l'on désigne par r le rayon, il vient

$$y\sqrt{1+f'(x)^2}=r$$

et l'on en déduit immédiatement pour la portion de surface comprise entre deux parallèles et deux méridiens

$$\Delta A=r\Delta\omega.\Delta x.$$

Aires quelconques.

74) Considérons d'abord une aire plane P ayant pour projection sur le plan des xy l'aire p. Si l'on désigne par ω l'angle que font

---

Cela posé si, dans le cas du cône, la section que l'on considère occupe le milieu de l'intervalle Δx, l'on a

$$\Delta A=2\pi y\sqrt{1+f'(x)^2}.\Delta x$$

et comme cette relation subsiste, quelque soit Δx, elle s'étend jusqu'à l'origine même de l'accroissement ΔA.

entr'eux les plans de ces aires, l'on a

$$\Delta p = \cos\omega \cdot \Delta P.$$

En effet, l'axe des x étant pris parallèle à l'intersection des plans dont il s'agit, la formule du N° 72 donne

$$\Delta p = \int_x^{x+\Delta x} y dx$$

$$\Delta P = \int_x^{x+\Delta x} \frac{1}{\cos\omega} y dx = \frac{1}{\cos\omega} \int_x^{x+\Delta x} y dx.$$

il vient donc

$$\Delta p \cdot = \cos\omega \cdot \Delta P.$$

Soit ensuite une surface

$$z = F(x,y).$$

et ω l'angle que le plan tangent au point (x,y,z) fait avec le plan des xy. Concevons qu'à partir de ce point, choisi comme on voudra, la continuité persiste suivant les directions fournies par les tangentes. Dans cette hypothèse aux accroissements $\Delta x, \Delta y$, répond une aire plane située dans le plan tangent et ayant pour expression,

$$\Delta A = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\cos\omega} = \Delta x \cdot \Delta y \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\Delta y}\right)^2}.$$

Cela posé, si le radical varie continuement avec y dans l'intervalle Δy, et que l'on traite x comme une constante, il vient

$$dA = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\Delta y}\right)^2} \cdot dy$$

De là résulte, eu égard aux changements que subit l'angle ω dans la section faite par le point (x,y,z) perpendiculairement à l'axe des x,

$$\Delta A = \Delta x \int_y^{y+\Delta y} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2} \cdot dy.$$

Suppose-t-on d'ailleurs que l'intégrale $\int_y^{y+\Delta y} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\Delta y}\right)^2} \cdot dy$,

soit continuement variable avec x dans l'intervalle Δx, l'on a immédiatement

$$\Delta A = \Delta x \int_{y}^{y+\Delta y} \sqrt{1+\left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{dz}{\Delta y}\right)^2}\cdot dy$$

et par suite, pour le cas général d'une aire quelconque,

$$\Delta A = \int_{x}^{x+\Delta x} dx \int_{y}^{y+\Delta y} \sqrt{1+\left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{dz}{\Delta y}\right)^2}\cdot dy.$$

Cubatures.

75) Le système des axes étant rectangulaire, considérons un solide quelconque et nommons z la partie de l'ordonnée comprise entre les surfaces qui le limitent supérieurement et inférieurement.

Si l'on imagine qu'à partir d'un point pris arbitrairement dans l'intérieur du solide la hauteur z demeure invariable, aux accroissements $\Delta x, \Delta y$ répond un volume ΔV ayant pour mesure,

$$\Delta V = z\Delta x . \Delta y.$$

De là résulte pour le cas où la hauteur z, supposée constante avec x dans l'intervalle Δx, varie continuement avec y dans l'intervalle Δy

$$\Delta V = \Delta x \int_{y}^{y+\Delta y} z dy.$$

L'intégrale $\int_{y}^{y+\Delta y} z dy$ est-elle à son tour supposée continuement variable avec x dans l'intervalle Δx, il vient sans autre intermédiaire

$$dV = dx \int_{y}^{y+\Delta y} z dy$$

et l'on a généralement

$$\Delta V = \int_{x}^{x+\Delta x} dx \int_{y}^{y+\Delta y} z dy.$$

On parvient au même résultat en considérant le solide comme engendré par les déplacements successifs d'une aire plane u qui se meut perpendiculairement à l'axe des x, en changeant de grandeur.

En effet, si cette aire est constante, l'on a

$$\Delta V = u \Delta x$$

Elle ne peut donc varier avec continuité, sans qu'il n'en résulte nécessairement

$$dV = u dx$$

et par suite

$$\Delta V = \int_x^{x+\Delta x} u dx$$

Observons que l'aire u a pour expression générale $\int_y^{y+\Delta y} z dy$.

La formule que nous venons d'obtenir coïncide donc avec la précédente.

Si le solide est symétrique par rapport à l'axe des x (solide de révolution), il vient

$$u = \pi y^2$$

On a donc en ce cas

$$\Delta V = \pi \int_x^{x+\Delta x} y^2 dx$$

S'agit-il en particulier de la sphère et veut-on procéder plus simplement encore ? Prenons un point de la surface et à partir de ce point une aire quelconque ΔA située dans le plan tangent. Soit d'ailleurs ΔV le volume du cône ayant pour sommet le centre de la sphère et pour base l'aire ΔA. Il vient,

$$\Delta V = \frac{r}{3} \Delta A$$

on déduit de là pour la sphère

$$dV = \frac{r}{3} dA$$

ou ce qui revient au même, la loi de génération des grandeurs $\Delta V, \Delta A$ étant constante,

$$\Delta V = \frac{r}{3} \Delta A.$$

De là résulte en remplaçant ΔA par la valeur du N° 73

$$\Delta V = \frac{r^2}{3} \Delta\omega \cdot \Delta x.$$

76) Considérons en dernier lieu le cas où la surface du solide a pour équation

$$r = f(\omega, \beta)$$

r étant le rayon vecteur mené de l'origine à un point quelconque de la surface, β l'angle que ce rayon fait avec sa projection sur le plan des zy, ω l'angle de cette projection avec l'axe des z.

Si l'on suppose d'abord qu'à partir d'un point choisi comme on voudra, le rayon vecteur soit constant, et qu'on exprime par ΔV le volume d'un cône ayant son sommet à l'origine et pour base la portion de surface sphérique qui répond aux accroissements angulaires $\Delta\omega$, Δb, il vient dans cette hypothèse

$$\Delta V = \frac{r^2}{3} \Delta\omega \cdot \Delta x = \frac{r^2}{3} \Delta\omega . \Delta(r \sin\beta) = \frac{r^3}{3} \Delta\omega . \Delta \sin\beta.$$

Suppose-t-on ensuite que constant avec ω dans l'intervalle $\Delta\omega$, le rayon vecteur varie continuement avec β dans l'intervalle $\Delta\beta$, l'on doit écrire

$$dV = \frac{r^3}{3} \cdot \Delta\omega . d. \sin\beta = \frac{r^3}{3} \Delta\omega . \cos\beta . d\beta.$$

On a donc en ce cas

$$\Delta V = \frac{\Delta\omega}{3} \int_{\beta}^{\beta+\Delta\beta} r^3 \cos\beta \cdot d\beta.$$

Suppose-t-on enfin que l'intégrale $\int_{\beta}^{\beta+\Delta\beta} r^3 \cos\beta \, d\beta$ soit continuement variable avec ω dans l'intervalle $\Delta\omega$, il vient,

$$dV = \frac{1}{3} d\omega \int_{\beta}^{\beta+\Delta\beta} r^3 \cos\beta \, d\beta$$

et l'on en déduit pour solution générale

$$\Delta V = \frac{1}{3}\int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} d\omega \int_{6}^{6+\Delta 6} r^3 \cos 6 . d6.$$

APPLICATIONS GÉNÉRALES.

Exemples particuliers offrant soit la résolution complète, soit la mise en équation de différents problèmes.

GÉNÉRATION DES TRIANGLES SEMBLABLES.

77) Soit x, y, z, les trois côtés d'un triangle quelconque construit sous certains angles déterminés.

Si l'on suppose que l'un des côtés varie (les angles restant les mêmes) les deux autres côtés varient en même temps. En ce cas, les grandeurs Δx, Δy, Δz, s'engendrent l'une par l'autre à partir de zéro, et la loi qui régit cette génération est indépendante de toute valeur attribuée aux quantités x, y, z. On a donc,

$$\Delta x = c\Delta z, \qquad \Delta y = c'\Delta z, \qquad \Delta x = c''\Delta y$$

c, c', c'' étant des constantes.

Mesure du parallélogramme et du parallélipipède.

78) Soit x et y les deux côtés d'un parallélogramme, A sa surface. La longueur x restant d'abord la même, imaginons que la

(1) Les questions traitées à partir du N° 77 jusque et y compris le N° 81 sont essentiellement élémentaires. On s'est attaché à les résoudre en faisant exclusivement usage

1° Des définitions du N° 1.

2° Des principes fondamentaux établis N°s 2, 3, 4.

On remarquera peut-être que le principe du N° 2 n'a été démontré que pour des parties commensurables avec a, mais il est aisé de voir que dès qu'il y a continuité dans la génération que l'on considère, la généralisation du principe en dérive immédiatement.

longueur y varie. Dans cette hypothèse les grandeurs ΔA, Δy s'engendrent l'une par l'autre à partir de zéro et la loi qui régit cette génération est indépendante de toute valeur attribuée à y. On a donc nécessairement

$$\Delta A = c\Delta y$$

ou ce qui revient au même

$$A = cy$$

c ne dépendant pas de y.

Suppose-t-on maintenant x variable et y constant, on trouve de la même manière,

$$A = c'x$$

c' ne dépendant point de x.

De là résulte

$$A = mxy.$$

m pouvant dépendre de l'angle suivant lequel se coupent les côtés du parallélogramme, mais non de leur grandeur.

Lorsque l'on pose $x=1$, $y=1$, il vient $A=m$. Fait-on en outre $m=1$, c'est-à-dire prend-on la surface m pour unité de mesure applicable à tous les parallélogrammes construits sous l'angle que l'on considère, on a généralement

$$A = xy.$$

Soit de même x, y, z les trois côtés d'un parallélipipède : V son volume.

Si l'on suppose successivement que chacune des trois longueurs x, y, z, varie, tandis que les deux autres demeurent constantes, on trouve comme tout-à-l'heure,

$$V = cx = c'y = c''z = mxyz$$

S'agit-il d'ailleurs d'un parallélipipède quelconque, construit sous certains angles déterminés, et prend-on pour unité de mesure le volume du parallélipipède construit sous les mêmes angles, avec des côtés respectivement égaux à l'unité de longueur, il vient en général,

$$V = xyz.$$

Mesure des angles et du secteur circulaire. Quadrature et cubature des cones et cylindres droits.

---

79) Soit un cercle et dans ce cercle un angle au centre ω. Soit d'ailleurs s l'arc compris entre les côtés de cet angle.

Les grandeurs Δs, $\Delta\omega$, s'engendrent l'une par l'autre à partir de zéro, et la loi qui régit cette génération est indépendante de l'angle ω. On a donc,

$$\Delta s = c\Delta\omega.$$

Cela posé, soit bmc (fig. 4) une tangente menée à l'extrémité du rayon $om=r$. Si nous prolongeons les côtés des angles $moa=\omega$, $moh=\Delta\omega$ et que nommant l la longueur bm, nous considérions la génération simultanée des grandeurs Δl, $\Delta\omega$, nous aurons évidemment

$$mh = dl = \Delta s = c\Delta\omega, \qquad mc = \Delta l = (c+\eta)\Delta\omega.$$

η étant une quantité qui décroit indéfiniment à mesure que $\Delta\omega$ converge vers zéro.

Il viendra de même pour un cercle concentrique au premier et dont le rayon serait $om'=r'$,

$$m'h' = dl' = \Delta s' = c'\Delta\omega, \qquad m'c' = \Delta l' = (c'+\eta')\Delta\omega.$$

Or, quel que soit l'accroissement $\Delta\omega$, l'on a toujours

$$\frac{\Delta l}{\Delta l'} = \frac{r}{r'} = \frac{c+\eta}{c'+\eta'}$$

il vient donc aussi

$$rc' - r'c = r'\eta - r\eta'.$$

En vertu de cette équation, la différence $r'\eta - r\eta'$ ne peut qu'être nulle ou constante. Mais en supposant qu'elle ne fut pas nulle, elle serait indéfiniment décroissante avec $\Delta\omega$. Elle est donc nulle, et l'on a séparément

$$r'\eta = r\eta', \qquad rc' = r'c.$$

De là résulte,

$$\frac{c}{c'}=\frac{r}{r'}$$

et par conséquent

$$\frac{\Delta s}{\Delta s'}=\frac{r}{r'}$$

Faisant $r'=1$, et prenant pour mesure de l'angle $\Delta\omega$ l'arc $\Delta s'$, on déduit de ce qui précède

$$\Delta s=r\Delta\omega, \qquad \Delta l=(r+\eta)\Delta\omega.$$

Soit encore A l'aire du triangle *bom*. A l'accroissement angulaire $\Delta\omega$ répond,

1° L'accroissement effectif. $omc=\Delta A=\frac{r}{2}\Delta l=\frac{r}{2}[r+\eta]\Delta\omega.$

2° L'accroissement différentiel. $omh=dA=\frac{r^2}{2}\Delta\omega=\frac{r}{2}\Delta s.$

Il vient donc

$$\text{Secteur } omh=\frac{r^2}{2}\Delta\omega=\frac{r}{2}\Delta s.$$

Le procédé, que nous venons de suivre pour la mesure du secteur circulaire, s'étend de lui-même aux quadratures et cubatures des cônes et cylindres droits.

Mesure du fuseau et de l'onglet cylindriques.

---

80) Étant donné deux plans qui se coupent suivant AX (fig. 5), soit YAX l'un de ces plans, m la projection sur ce plan d'une droite qui se déplace en lui restant perpendiculaire.

z la partie de cette droite interceptée par les deux plans

$x=Ap$, $y=mp$, les coordonnées rectangulaires du point m.

mm' la direction suivant laquelle *commence* le déplacement de ce point.

r le rayon d'un cercle ayant son centre en O sur la droite AX, et touchant en m la direction mm'.

μ le rapport *constant* $\frac{y}{z}$.

ΔA l'aire engendrée, à partir du point m, par les déplacements successifs de la perpendiculaire z.

ΔV le volume de la pyramide qui a son sommet en O et ΔA pour base.

Imaginons d'abord que le déplacement du point m *persiste* suivant une seule et même direction. Dans cette hypothèse la perpendiculaire z engendre une aire trapézoïdale, et il vient,

$$\Delta A = mm' \cdot \mu \cdot \left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) \cdot = \mu r \cdot \left(1 + \frac{\Delta y}{2y}\right) \Delta x.$$

$$\Delta V = \frac{r}{3} \Delta A = \frac{1}{3} \mu r^2 \left(1 + \frac{\Delta y}{2y}\right) \cdot \Delta x.$$

De là résulte

$$dA = \mu r \Delta x \qquad (1)$$
$$dV = \tfrac{1}{3} \mu r^2 \Delta x. \qquad (2)$$

Suppose-t-on maintenant que le déplacement du point m s'effectue suivant la circonférence mo, la quantité r cesse d'être variable. Dès lors les lois de génération exprimées par les équations (1) et (2) sont constantes, indépendamment de toute valeur attribuée à x et l'on en déduit immédiatement,

$$dA = \Delta A = \mu r \Delta x$$
$$dV = \Delta V = \tfrac{1}{3} \mu r^2 \Delta x.$$

Dans l'hypothèse où nous venons de nous placer, l'aire engendrée par la perpendiculaire z est une portion de surface cylindrique. Les quadratures et cubatures, qui répondent à ce cas, n'offrent, ainsi qu'on le voit, aucune difficulté. S'il s'agit du fuseau et de l'onglet compris entre les deux plans que l'on considère, on doit remplacer Δx par $2r$. On peut d'ailleurs substituer à μr la valeur $z = \Delta l$, laquelle répond à l'abscisse $x = AO$. En opérant de cette manière, on trouve,

$$\Delta A = 2r \Delta l$$
$$\Delta V = \tfrac{2}{3} r^2 \Delta l.$$

Quadrature et cubature de la sphère.

81) Considérons une sphère quelconque, engendrée par la rotation du demi cercle om autour du diamètre nn'.

Soit $\Delta\omega$ l'angle de deux plans méridiens, dont l'un, supposé fixe, est représenté fig. 5.

La demi circonférence *nmn'* étant prise pour base d'un demi cylindre droit, circonscrit à la sphère, le fuseau et l'onglet cylindriques, qui répondent à l'angle $\Delta\omega$, ont respectivement pour mesure,

$$\Delta A = 2r\Delta l = 2r[r+\eta]\Delta\omega.$$
$$\Delta V = \tfrac{2}{3}r^2\Delta l = \tfrac{2}{3}r^2[r+\eta]\Delta\omega.$$

De là résulte pour le fuseau et l'onglet sphérique, qui répondent à la même ouverture angulaire,

$$dA = \text{fuseau sphérique} = 2r^2\Delta\omega.$$
$$dV = \text{onglet sphérique} = \tfrac{2}{3}r^3\Delta\omega.$$

S'il s'agit d'une zone et du secteur correspondant, il suffit de rétablir le facteur Δx au lieu du facteur $2r$. On trouve ainsi

$$\text{zone sphérique} = r\Delta\omega \cdot \Delta x.$$
$$\text{secteur sphérique} = \tfrac{1}{3}r^2\Delta\omega\,\Delta x.$$

Loi des températures d'une barre solide.

82) Considérons une barre prismatique, chauffée ou non à l'une de ses extrémités et placée dans un milieu dont la température est zéro.

Les dimensions transversales de la barre, étant supposées très petites, nous ne tiendrons pas compte des différences de température qui peuvent exister entre les diverses parties d'une même section.

Nommons ω l'aire de la section transversale, γ son périmètre, k et h les coefficients de conductibilité intérieure et extérieure, C la chaleur spécifique, D le poids de l'unité de volume.

Soit une section quelconque m, située à une distance x de l'origine, et v la température de cette section à la fin du temps t.

Lorsqu'une même quantité de calorique traverse à la fois toutes les sections, la température reste partout la même à toutes les époques. En ce cas, si l'on désigne par Q la quantité de calorique qui traverse la section m pendant l'unité de temps, l'on a

$$Q\Delta x = k\omega\Delta V.$$

De là résulte pour le cas où le flux de calorique varie continue-

ment d'une section à l'autre, la température restant partout la même, ou *subissant partout les mêmes changements*,

$$Q = k\omega \frac{dv}{\Delta x}\text{(1)}.$$

S'agit-il d'ailleurs d'une autre section, séparée de la première par l'intervalle Δx, la différence entre les quantités de calorique, qui traversent à la fois ces deux sections pendant l'unité de temps, a pour expression $\Delta\left(k\omega\frac{dv}{\Delta x}\right)$.

Quelle que soit, pendant le temps que l'on considère, la température de chacune des sections comprises dans l'intervalle Δx, l'on peut toujours imaginer que la température du milieu varie d'une section à l'autre, de telle manière que, pour chaque section, l'excès de sa température sur celle du milieu qui la circonscrit, soit constamment représenté par v. Dans cette hypothèse, à la longueur Δx répond une perte de calorique, effectuée par la surface extérieure de la barre, et exprimée pour l'unité de temps par $h\gamma v\Delta x$.

Il vient donc pour mesure de la quantité de calorique qui s'accumule, pendant l'unité de temps, sur la longueur Δx.

$$\Delta\left(k\omega\frac{dv}{\Delta x}\right) - h\gamma v\Delta x.$$

Cela posé, si l'on prend à son origine le changement de température de la section m, on remarque qu'il s'effectue suivant une loi déterminée. Cette loi, *supposée permanente*, répond à une élévation de température exprimée, pour l'unité de temps, par la dérivée partielle $\frac{dv}{\Delta t}$. On peut d'ailleurs imaginer qu'elle s'applique, avec cette même détermination, à toute l'étendue de l'intervalle Δx. En ce cas, *les changements de température sont partout les mêmes*, et ils ne peuvent se produire sans qu'il n'y ait absorbtion d'une quantité de calorique représentée, pour l'unité de temps et pour la

(1) Cette relation subsiste en général. Il faut observer seulement que dans le cas où la dérivée partielle $\frac{dv}{\Delta x}$ est fonction de t, Q exprime, pour l'unité de temps, non plus la quantité de chaleur qui traverse *effectivement* la section m, mais celle qui la traverserait, si le flux persistait en conservant la détermination qu'il affecte à l'instant que l'on considère.

longueur Δx, par l'expression $C.D.\omega.\Delta x.\frac{dv}{\Delta t}$. On a donc nécessairement,

$$\Delta\left(k\omega\frac{dv}{\Delta x}\right)-h\gamma v\Delta x=C\cdot D\cdot\omega\cdot\Delta x\cdot\frac{dv}{\Delta t}.$$

De là résulte, pour le cas général que nous avons en vue, les quantités v et $\frac{dv}{\Delta t}$ n'étant pas constantes, mais bien continuement variables avec x dans l'intervalle Δx,

$$k\omega\frac{d^2v}{\Delta x^2}-h\gamma v=C\cdot D\cdot\omega\cdot\frac{dv}{\Delta t}.$$

L'équilibre est-il établi d'une manière permanente, on a $\frac{dv}{\Delta t}=0$ et il vient plus simplement,

$$k\omega\frac{d^2v}{\Delta x^2}=h\gamma v.$$

Problème de la corde vibrante.

83) Considérons une corde tendue entre deux points fixes et exécutant librement des vibrations quelconques très petites.

Soit m la masse de la corde pour l'unité de longueur, P sa tension *supposée constante*, y la distance comprise à la fin du temps t entre un plan fixe, choisi comme on voudra, et un point quelconque n appartenant à la courbe.

A partir du point n prenons un arc Δs, assez petit pour que, dans toute son étendue, la dérivée partielle $\frac{dy}{\Delta s}$ affecte le même signe, à l'instant que l'on considère. Isolons cet arc du reste de la courbe, et pour suppléer l'effet de la liaison, plaçons à chacune de ses extrémités et suivant la tangente une force égale à P. Les composantes parallèles aux y étant de signe contraire, et l'une d'elles ayant pour expression $P\frac{dy}{\Delta s}$, leur résultante est évidemment $\Delta\left(P\frac{dy}{\Delta s}\right)$.

Cela posé, si la loi qui régit le changement d'état du point n, à partir du temps t, subsistait en même temps et avec la même détermination pour tous les points de l'arc Δs, la réaction due à l'inertie aurait pour composante parallèle aux y, $m\Delta s \cdot \frac{d^2y}{\Delta t^2}$, et il viendrait,

$$\Delta\left(P\frac{dy}{\Delta s}\right) = m\Delta s \cdot \frac{d^2y}{\Delta t^2}$$

De là résulte pour le cas ou la dérivée partielle $\frac{d^2y}{\Delta t^2}$ varie continuement avec s dans l'intervalle Δs,

$$P\frac{d^2y}{\Delta s^2} = m\frac{d^2y}{\Delta t^2}.$$

IX.—*Note sur un nouvel énoncé des conditions d'équilibre d'un système de forces ;*

Par J.-B. BRASSEUR,

PROFESSEUR ORDINAIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Premier cas : les forces sont situées dans un même plan.

Tant de forces que l'on voudra, situées dans un même plan et appliquées à un système de points invariablement liés entre eux, se font équilibre, lorsque la somme de leurs moments est nulle par rapport à chacun de trois points quelconques non en ligne droite.

Démonstration. Représentons

par P, P', P'', etc. les forces données,
par (x,y), (x',y'), (x'',y''), etc. les coordonnées rectangulaires de leurs points d'application.

Ayant décomposé chacune de ces forces en deux respectivement parallèles aux deux axes coordonnés, désignons

par X, X', X'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des x,
par Y, Y', Y'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des y.

Cela posé, si nous exprimons que la somme des moments de toutes ces forces est nulle d'abord par rapport à l'origine, puis par rapport à deux autres points quelconques, non en ligne droite avec l'origine, nous aurons, en représentant par (a,b), (a',b') les coordonnées de ces deux derniers points, les trois équations écrites en abrégé :

$$\Sigma(Xy-Yx)=0,$$
$$\Sigma[X(y+b)-Y(x+a)]=0,$$
$$\Sigma[X(y+b')-Y(x+a')]=0.$$

Conservant la première et réduisant les deux autres au moyen de la première, il vient

$$\left.\begin{array}{r}\Sigma(Xy-Yx)=0\\ \Sigma(Xb-Y)=0\\ \Sigma(Xb'-Ya')=0\end{array}\right\}\text{ ou bien }\left\{\begin{array}{l}\Sigma(Xy-Yx)=0\,..(1)\\ b\Sigma X-a\Sigma Y=0\,..(2)\\ b'\Sigma X-a'\Sigma Y=0\,..(3).\end{array}\right.$$

Les deux dernières équations (2,3) donnent, en éliminant successivement ΣX et ΣY, les deux équivalentes

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}\right)\Sigma Y=0, \quad \left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)\Sigma X=0,$$

qui ne peuvent exister à moins que l'on ait séparément

$$\Sigma X=0 \text{ et } \Sigma Y=0 \ldots . (m);$$

car le facteur $\left(\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}\right)$ égalé à zéro conduirait à conclure que les deux points (a,b), (a',b') sont en ligne droite avec l'origine, ce qui est contre l'hypothèse que nous avons faite. Or, les deux dernières équations $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$ avec l'équation (1) expriment précisément les conditions connues pour l'équilibre d'un système de forces situées dans un même plan; donc, etc.

Second cas : les forces sont situées dans l'espace.

Tant de forces que l'on voudra, appliquées d'une manière quelconque à un système de points invariablement liés entre eux, se font équilibre lorsque, ces forces étant projetées successivement sur les trois plans coordonnés rectangulaires, la somme des moments des projections de ces forces sur chaque plan coordonné est nulle d'abord par rapport à l'origine et puis par rapport à un autre point quelconque de ce plan; seulement les trois points quelconques, choisis respectivement dans les trois plans coordonnés, ne doivent pas être les projections d'un même point de l'espace.

Démonstration. Représentons

par P, P', P'', etc. les forces données,
par (x,y,z), (x',y',z'), (x'',y'',z''), etc. les coordonnées de leurs points d'application.

Décomposons chacune des forces en trois respectivement parallèles aux trois axes rectangulaires et désignons

par X, X', X'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des x,
par Y, Y', Y'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des y,
par Z, Z', Z'', etc. leurs composantes parallèles à l'axe des z.

Cela posé, pour exprimer d'abord que la somme des moments des projections de toutes les forces sur chaque plan coordonné est nulle par rapport à l'origine, nous aurons les trois équations connues

$$\Sigma(Xy-Yx)=0, \quad \Sigma(Xz-Zx)=0, \quad \Sigma(Zy-Yz)=0 \ldots (m).$$

Prenons actuellement
dans le plan des xy un point dont les coordonnées soient a,b,
dans celui des xz un point dont les coordonnées soient a,c,
dans celui des yz un point dont les coordonnées soient b,c';
ces trois points ainsi choisis respectivement dans les trois plans coordonnés ne seront pas les projections d'un même point de l'espace; car pour cela il faudrait que l'on eût $c'=c$.

Pour exprimer maintenant que la somme des moments des projections de toutes les forces sur chaque plan coordonné est nulle par rapport au point que nous avons choisi plus haut dans ce même plan; nous aurons les trois nouvelles équations

$$\begin{aligned}\Sigma[X(y+b)-Y(x+a)]&=0,\\ \Sigma[X(z+c)-Z(x+a)]&=0,\\ \Sigma[Z(y+b)-Y(z+c')]&=0,\end{aligned}$$

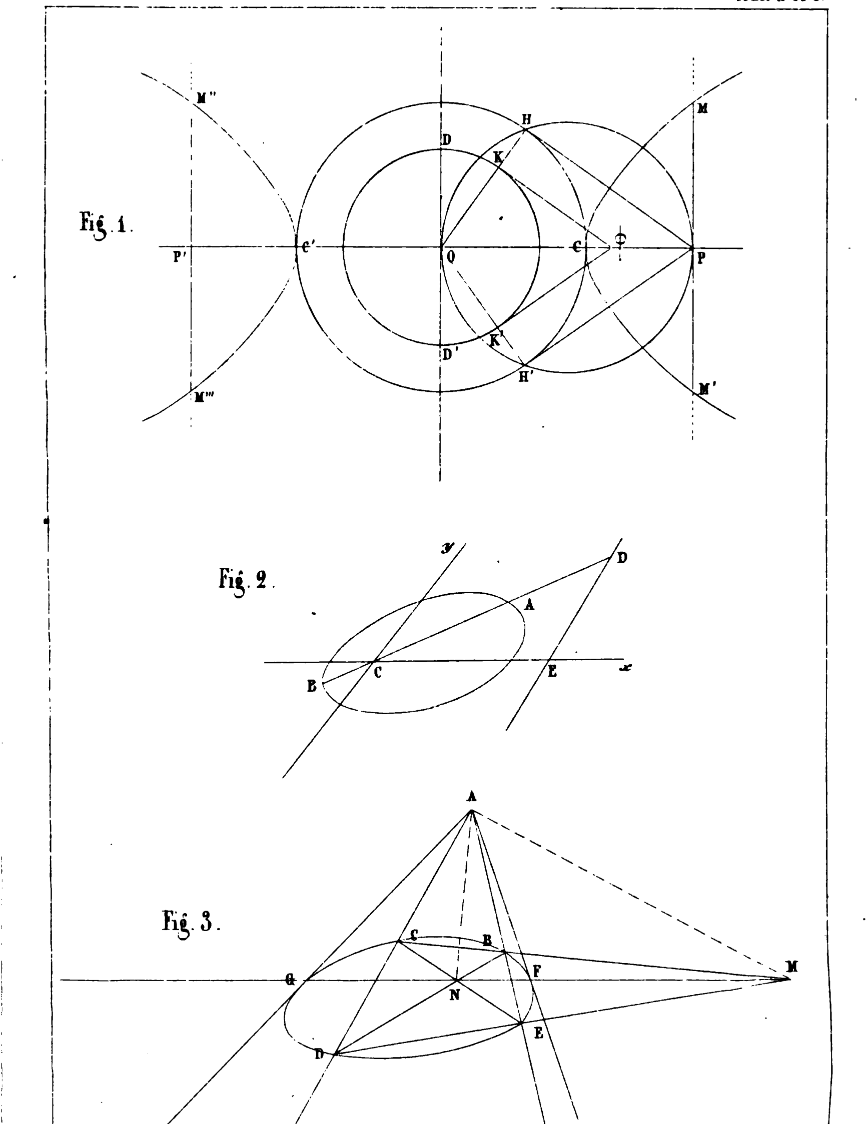
qui se réduisent en vertu des trois équations (m) à

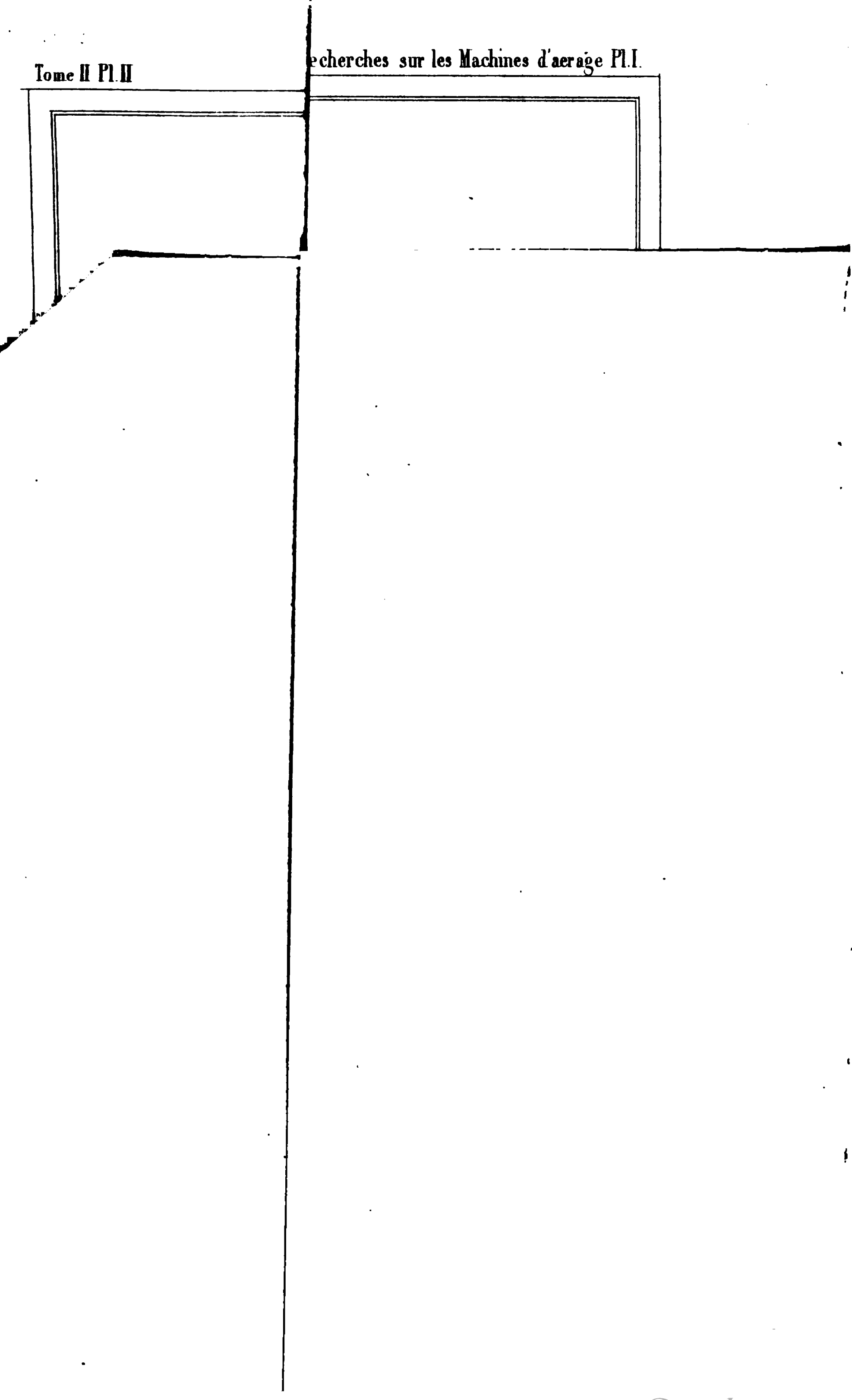
$$\left.\begin{aligned}\Sigma(Xb-Ya)&=0\\ \Sigma(Xc-Za)&=0\\ \Sigma(Zb-Yc')&=0\end{aligned}\right\}\text{ ou bien }\left\{\begin{aligned}b\Sigma X-a\Sigma Y&=0\\ c\Sigma X-a\Sigma Z&=0\\ b\Sigma Z-c'\Sigma Y&=0\end{aligned}\right\}\ldots(n).$$

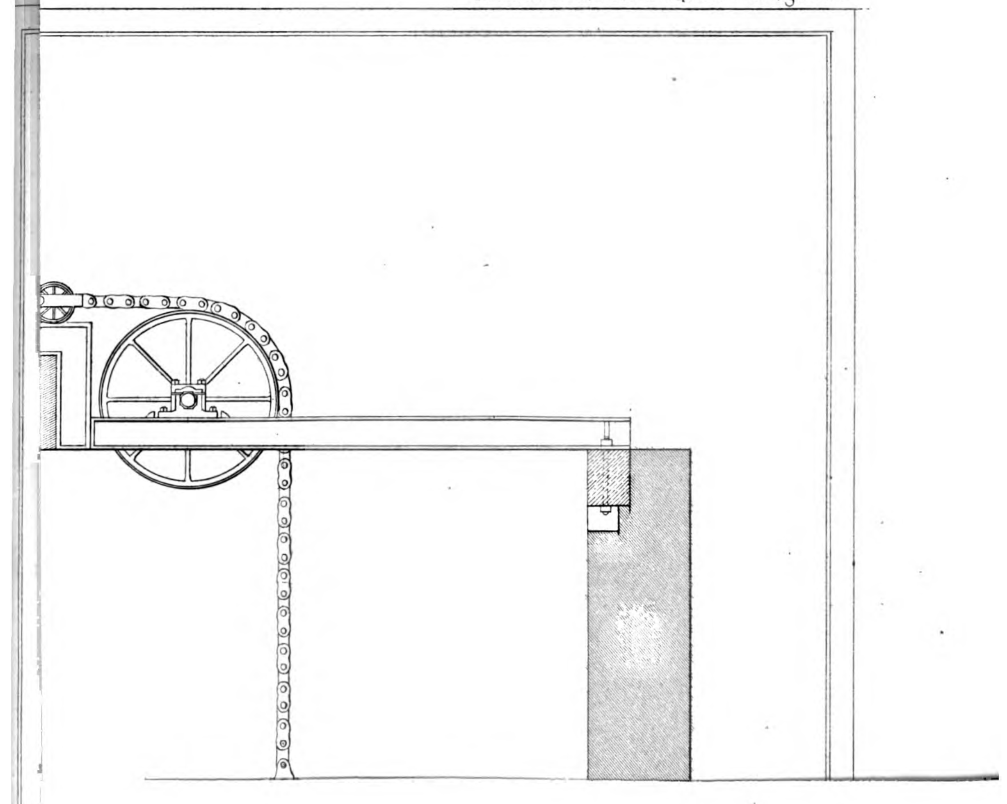
En éliminant ΣX et ΣZ de ces trois équations (n), on a $(c-c')\Sigma Y=0$; et puisque $(c-c')$ n'est pas nul, on a nécessairement $\Sigma Y=0$; et les équations (n) deviennent

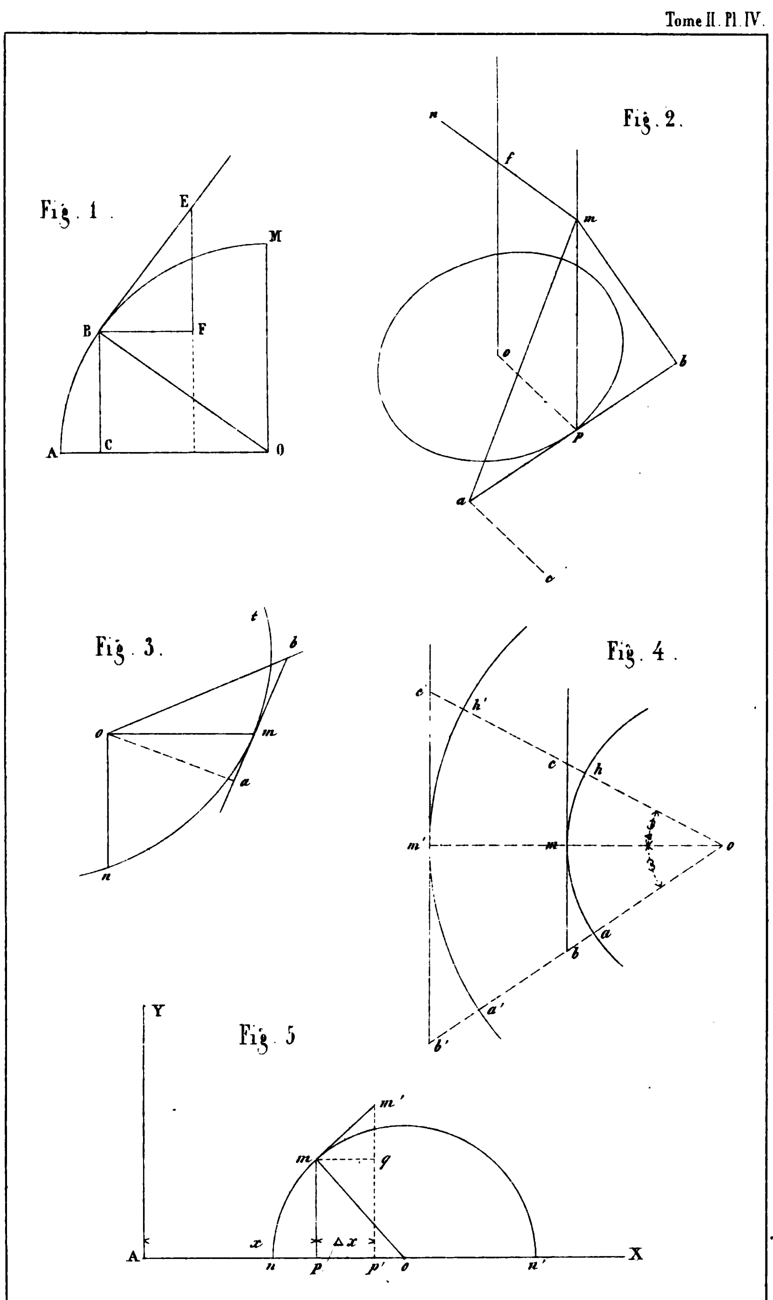
$$\Sigma X=0,\qquad \Sigma Y=0,\qquad \Sigma Z=0.$$

Or, ces trois équations constituent avec les trois équations (m) les six conditions d'équilibre connues; donc, etc.


Fig. 1.
M''
M
H
D
K
P'
C'
Q
C
Φ
P
K'
D'
H'
M'''
M'
Fig. 2.
y
D
A
C
E
x
B
Fig. 3.
A
C
B
G
F
M
N
E
D


Tome II Pl. II
echerches sur les Machines d'aerage Pl. I.




Fig. 1.
E
M
B
F
A
C
O
Fig. 2.
n
f
m
o
b
p
a
c
Fig. 3.
t
b
o
m
a
n
Fig. 4.
c'
h'
c
h
m'
m
o
b
a
a'
b'
Y
Fig. 5
m'
m
q
A
x
Δx
X
n
p
p'
o
n'